4. Modellierung mit Graphen

Modellierung beschreibt **Objekte und Beziehungen** zwischen ihnen.

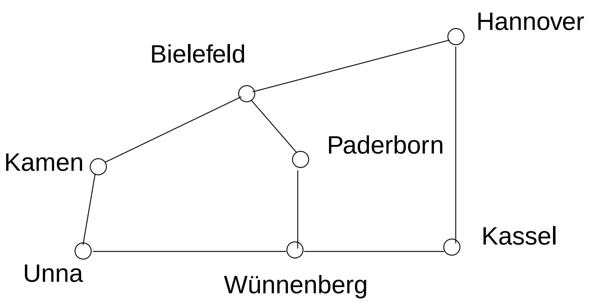
Graphen eignen sich zur Modellierung für ein **breites Aufgabenspektrum**.

Ein **Graph** ist eine Abstraktion aus Knoten und Kanten:

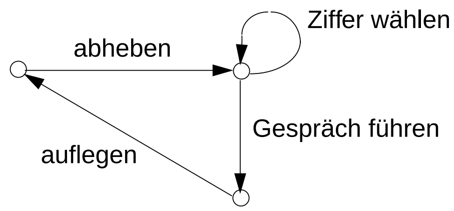
- **Knoten**: Eine Menge gleichartiger Objekte
- **Kanten**: Beziehung zwischen je zwei Objekten, 2-stellige Relation über Knoten

Je nach Aufgabenstellung werden **ungerichtete oder gerichtete** Graphen verwendet.

ungerichtet



gerichtet



Beschränkung auf **endliche Knotenmengen** und **2-stellige** Relation reicht hier aus.

Themenübersicht

5.1 Grundlegende Definitionen
Gerichteter Graph

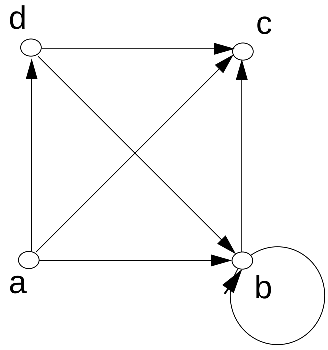
Ein **gerichteter Graph** G = (V, E) hat eine endliche **Menge V von Knoten** und eine **Menge E gerichteter Kanten**, mit $E \subseteq V \times V$.

Die Kantenmenge E ist eine **2-stellige Relation** über V.

Beispiel:

V = {a, b, c, d}

E = {(a, b), (a, c), (a, d), (b, b), (b, c), (d, b), (d, c)}



Eine Kante wird als (v, u) oder v -> u notiert.

Eine Kante (v, v) heißt **Schleife** oder Schlinge.

Die Definition von Graphen schränkt ein auf

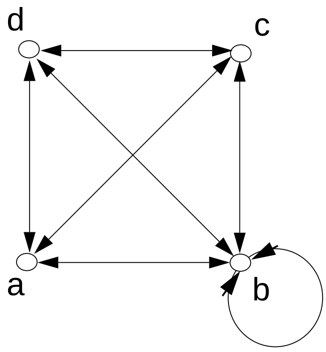
- endliche Graphen mit **endlichen Knotenmengen**,
- einfache Kanten:
  - eine **Kante verbindet nicht mehr als zwei Knoten**,
  - von Knoten x nach Knoten y gibt es höchstens eine Kante

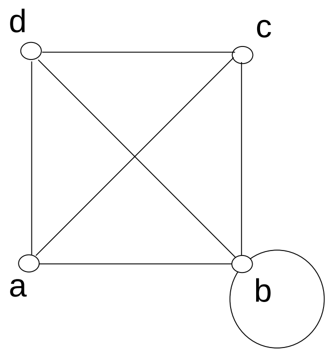
Multigraph: Es kann mehr als eine Kante von Knoten x nach Knoten y geben (siehe Mod-5.7)

Ungerichteter Graph

Ist die **Kantenmenge** E eines gerichteten Graphen eine **symmetrische Relation**, so beschreibt er einen **ungerichteten Graphen**:
Zu jeder Kante x -> y aus E gibt es auch y -> x in E.

Wir fassen zwei Kanten x -> y, y -> x
zu einer **ungerichteten Kante**
zusammen:
{x, y} die Menge der Knoten,
die die Kante verbindet.





Ungerichtete Graphen werden auch direkt definiert:

Ein **ungerichteter Graph** G = (V, E) hat eine endliche **Menge V von Knoten** und eine **Menge E ungerichteter Kanten, mit $E \subseteq \{ \{x, y\} \mid x, y \in V \}$**

Der abgebildete Graph mit ungerichteten Kanten:
V = {a, b, c, d}   E = { {a, b}, {a, c}, {a, d}, { b }, {b, c}, {d, b}, {d, c} }

In dieser Notation ist eine **Schleife eine 1-elementige Menge**, z. B. { b }

Darstellung von Graphen

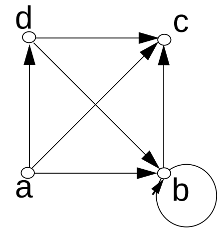
abstrakt:

Knotenmenge V = {a, b, c, d}

Kantenmenge E = {(a, b), (a, c), (a, d),
(b, b), (b, c),
(d, b), (d, c)}

anschaulich:

Graphik



Datenstrukturen für **algorithmische Berechnungen**:

Knotenmenge V als Indexmenge

lineare Ordnung der Knoten definieren

a, b, c, d

sei |V| = n

Adjazenzmatrix AM mit n * n Wahrheitswerten zur Darstellung der (gerichteten) Kanten:

$AM(i, j) = (i, j) \in E$

	a	**b**	**c**	**d**
a	**f**	**w**	**w**	**w**
b	**f**	**w**	**w**	**f**
c	**f**	**f**	**f**	**f**
d	**f**	**w**	**w**	**f**

Adjazenzlisten: zu jedem Knoten i eine Folge von Knoten, zu denen er eine Kante hat $(i, j) \in E$

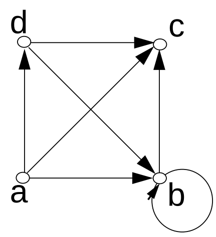
a	**(b, c, d)**
b	**(b, c)**
c	**()**
d	**(b, c)**

Ungerichtete Graphen als gerichtete Graphen mit symmetrischer Kantenmenge darstellen

Teilgraph

Der Graph G' = (V', E') ist ein **Teilgraph** des Graphen G = (V, E), wenn **V' $\subseteq$ V und E' $\subseteq$ E**.
(Gilt für **gerichtete** und **ungerichtete** Graphen.)

Graph G = (V, E):



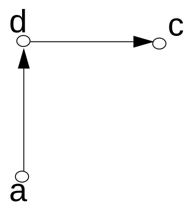
V = {a, b, c, d}

E = {(a, b), (a, c), (a, d),
(b, b), (b, c),
(d, b), (d, c)}

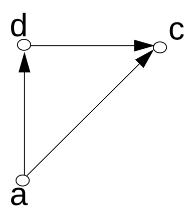
Teilgraph G’ = (V’, E’) zu G

V’ = {a, c, d}

E’ = {(a, d), (d, c)}



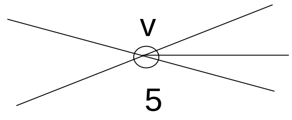
Teilgraph G” zu G
durch V” = {a, c, d} **induziert**



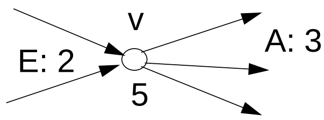
Zu einem Graphen G = (V, E) **induziert** eine Teilmenge der Knoten V' $\subseteq$ V den **Teilgraphen** G' = (V', E'), wobei E' alle Kanten aus E enthält, deren Enden in V' liegen.

Knotengrad

Sei G = (V, E) ein **ungerichteter** Graph:
Der **Grad** eines Knotens v ist die
Anzahl der Kanten {x, v}, die in v enden.



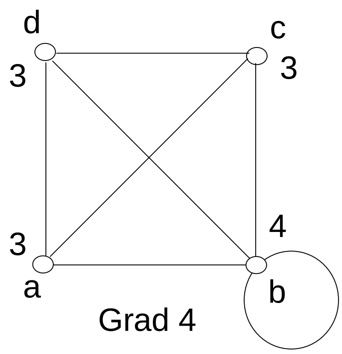
Sei G = (V, E) ein **gerichteter** Graph:
Der **Eingangsgrad** eines Knotens v ist die
Anzahl der Kanten (x, v) ∈ E, die in v münden.



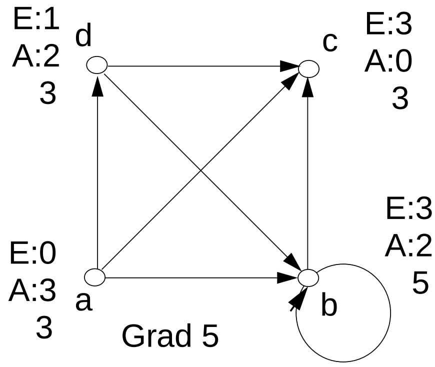
Der **Ausgangsgrad** eines Knotens v ist die
Anzahl der Kanten (v, x) ∈ E, die von v ausgehen.

Der **Grad** eines Knotens v ist die Summe seines
Eingangs- und Ausgangsgrades.

Der **Grad eines** gerichteten oder ungerichteten **Graphen** ist der **maximale Grad seiner Knoten**.



Grad 4



Grad 5

Markierte Graphen

Ein Graph G = (V, E) modelliert eine Menge von **Objekten** V und die Existenz von **Beziehungen** zwischen ihnen.

Viele Aufgaben erfordern, dass den **Knoten und/oder den Kanten weitere Informationen** zugeordnet werden.

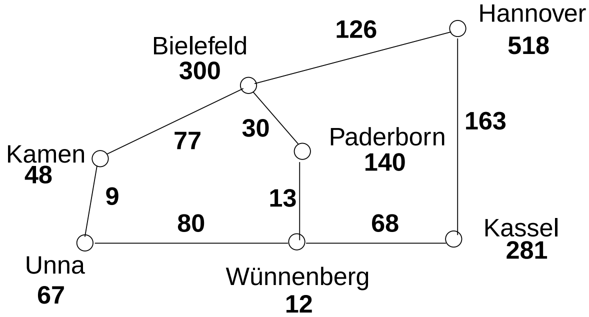
Dies leisten **Markierungsfunktionen**

Knotenmarkierung

MV : **V** → WV,
z.B. EinwohnerzahlTsnd: **V** → ℕ

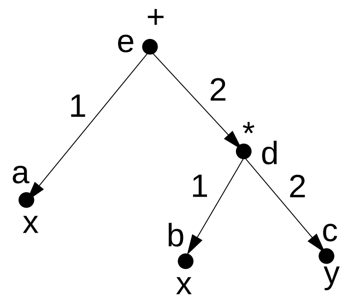
Kantenmarkierung

ME :**E** → WE,
z.B. EntfernungKm: **E** → ℕ



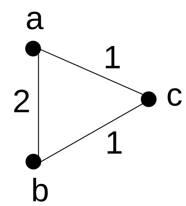
Spezielle Kantenmarkierungen

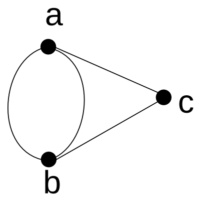
Ordnung von Kanten:
$E \to \mathbb{N}$
legt die **Reihenfolge der Kanten** fest, die von einem Knoten ausgehen, z. B. im Kantorowitsch-Baum von links nach rechts.



V := {a, b, c, d, e}
MV := {(a, x), (b, x), (c, y), (d,*), (e, +)}
ME := {((e,a), 1), ((e,d), 2), ((d,b), 1), ((d,c),2)}

Anzahl von Kanten:
$E \to \mathbb{N}$
modelliert **mehrfache Verbindungen zwischen denselben Knoten**.
G ist dann ein **Mehrfachgraph (Multigraph)**.
In der graphischen Darstellung schreibt man die Anzahl an die Kante oder zeichnet mehrere Kanten.

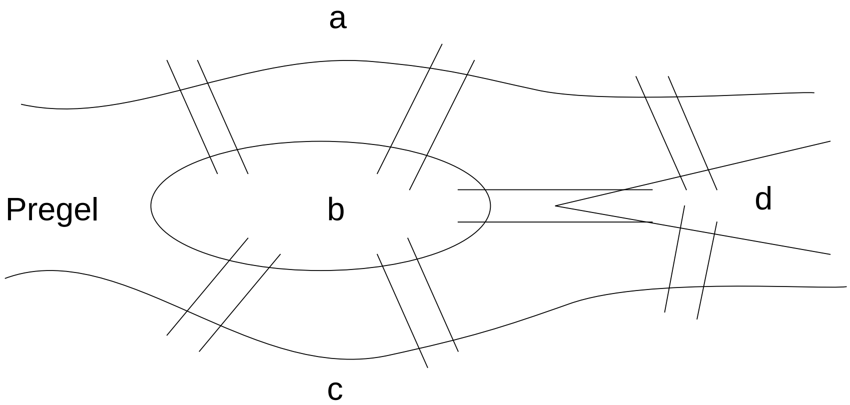




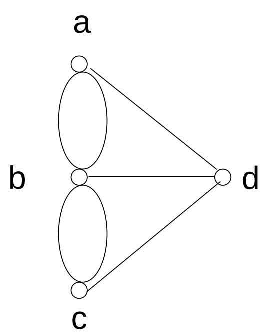
ME := {({a, b}, 2), ({a, c}, 1), ({b, c}, 1)}

5.2 Wegeprobleme

Beispiel: **Königsberger Brückenproblem** (Euler, 1736)



Skizze von Königsberg



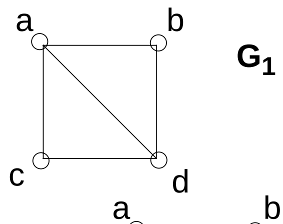
Multigraph dazu

a. Gibt es einen Weg, der jede der 7 Brücken genau einmal überquert und zum Ausgangspunkt zurückkehrt?

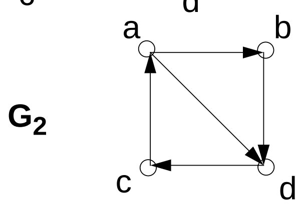
b. Gibt es einen Weg, der jede der 7 Brücken genau einmal überquert?

Wege und Kreise

Sei G = (V, E) ein ungerichteter Graph.
Eine Folge von Knoten $(v_0, v_1, ..., v_n)$
mit $\{v_i, v_{i+1}\} \in E$ für i = 0,..., n-1
heißt ein **Weg von v_0 nach v_n**. Er hat die **Länge n** ≥ 0.



Entsprechend für gerichtete Graphen:
mit $(v_i, v_{i+1}) \in E$ für i = 0,..., n-1



Ein Weg $(v_0, v_1, ..., v_n)$ einer Länge $n \geq 1$ mit $v_0 = v_n$
und **paarweise verschiedenen** Kanten $(v_0, v_1), ..., (v_{n-1}, v_n)$
heißt **Kreis im ungerichteten** Graphen und
Zyklus im gerichteten Graphen.

Ein gerichteter Graph der keinen Zyklus enthält heißt
azyklischer Graph (engl. **directed acyclic graph, DAG**).

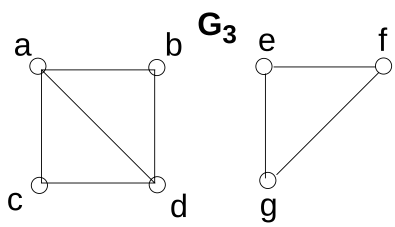
Zusammenhang in Graphen

Ein ungerichteter Graph G = (V, E) heißt **zusammenhängend**, wenn es für beliebige Knoten v, w $\in$ V einen Weg von v nach w gibt.

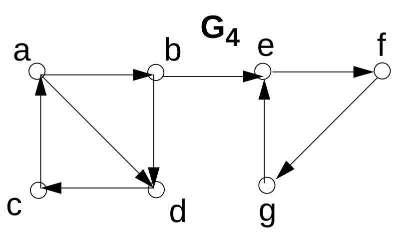
Ein gerichteter Graph heißt unter derselben Bedingung **stark zusammenhängend**.

Ein Teilgraph G' = (V', E') eines ungerichteten (gerichteten) Graphen G = (V, E) heißt **(starke) Zusammenhangskomponente**, wenn

- G' **(stark) zusammenhängend** ist und wenn
- G keinen anderen (stark) zusammenhängenden Teilgraphen G'' hat, der G' als Teilgraph enthält.



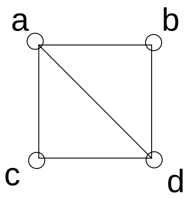
Zusammenhangskomponenten sind also
maximale Teilgraphen, die zusammenhängend sind.



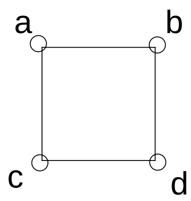
Spezielle Wege und Kreise

Sei G = (V, E) ein ungerichteter, zusammenhängender, schleifenfreier Graph.

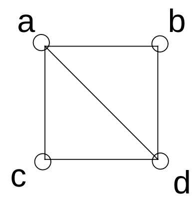
Ein **Euler-Weg** bzw. ein **Euler-Kreis** in G ist ein Weg, der **jede Kante aus E genau einmal** enthält.



(a, b, d, a, c, d)
Euler-Weg



(a, b, d, c, a)
Euler-Kreis



(a, b, d, c, a)
Hamilton-Kreis

G hat einen **Euler-Kreis** genau dann, wenn **alle Knoten geraden Grad** haben.

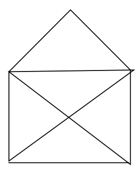
G hat einen **Euler-Weg**, der kein Kreis ist, genau dann,
wenn G genau **2 Knoten mit ungeradem Grad** hat.

Ein **Hamilton-Kreis** enthält **jeden Knoten aus V genau einmal**.

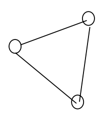
Wegeprobleme mit Euler-Wegen

1. Königsberger Brückenproblem (Mod-5.8):
   Euler-Weg, Euler-Kreis

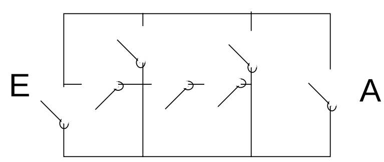
2. Kann man diese Figur in einem Zuge zeichnen?



3. Eine Inselgruppe mit n > 1 Inseln benötigt direkte Schiffsverbindungen zwischen allen Paaren von Inseln. Es gibt nur ein einziges Schiff. Kann es auf einer Tour alle Verbindungen genau einmal abfahren? Für welche n ist das möglich?

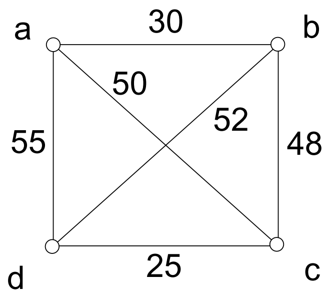


4. Planen Sie ein Gruselkabinett:
   Ein Haus mit n > 1 Räumen, 1 Eingangstür, eine Ausgangstür, beliebig vielen Innentüren. Jede Tür schließt nach Durchgehen endgültig. Die Besucher gehen einzeln durch das Haus. Es soll niemand eingesperrt werden.

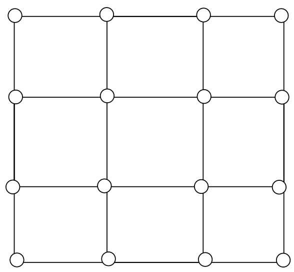


Wegeprobleme mit Hamilton-Kreisen

1. Traveling Salesman's Problem (Handlungsreisender): n Städte sind mit Straßen bestimmter Länge verbunden. Gesucht ist eine kürzeste Rundreise durch alle Städte.



2. In einem n * n Gitter von Prozessoren soll eine Botschaft sequentiell von Prozessor zu Prozessor weitergegeben werden. Sie soll jeden Prozessor erreichen und zum Initiator zurückkehren.
   Für welche n ist das möglich?



5.3 Verbindungsprobleme

Modellierung durch Graphen wie bei Wegeproblemen (Abschnitt 5.2), aber hier interessiert
die **Existenz von Verbindungen** (Wegen) zwischen Knoten,
die **Erreichbarkeit** von Knoten,
nicht bestimmte Knotenfolgen.

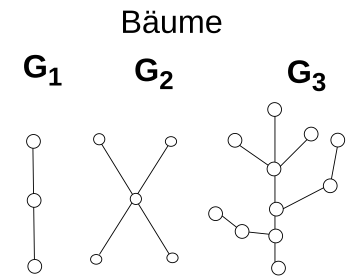
Sei G = (V, E) ein
ungerichteter, zusammenhängender Graph
für alle folgenden Begriffe:

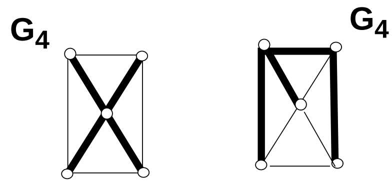
Wenn G **keine Kreise** enthält,
heißt er **(ungerichteter) Baum**.

In Bäumen heißen **Knoten mit Grad 1 Blätter**.

Für jeden ungerichteten **Baum** G = (V, E) gilt
| E | = |V| - 1

Ein zusammenhängender Teilgraph von G,
der jeden Knoten aus V enthält und ein Baum ist,
heißt **Spannbaum** zu G.



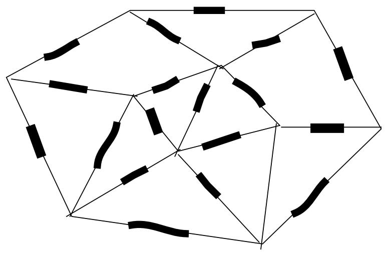


2 Spannbäume zu demselben Graphen G_4

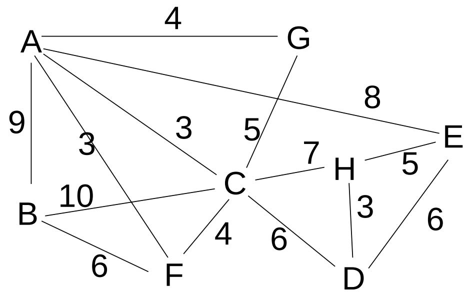
Modellierung mit Spannbäumen zu Graphen

Ein **Spannbaum** ist ein zusammenhängender Teilgraph mit der kleinsten Anzahl Kanten.
Er **modelliert kostengünstigen Zusammenhang**.

1. Aufständische Gefangene wollen eine minimale Anzahl von Gefängnistüren sprengen, so dass alle Gefangenen freikommen:



2. Alle Agenten A, ..., H sollen direkt oder indirekt miteinander kommunizieren. Die Risikofaktoren jeder paarweisen Verbindung sind:



Es soll ein Netz mit geringstem Risiko gefunden werden.

Verbindung und Zusammenhang

Sei G = (V, E) ein ungerichteter, zusammenhängender Graph.

v ist ein **Schnittknoten** in G, wenn G **ohne v nicht mehr zusammenhängend** ist.

e ist eine **Brückenkante** in G, wenn G **ohne e nicht mehr zusammenhängend** ist.

G heißt **orientierbar**, wenn man für **jede Kante eine Richtung** so festlegen kann, dass der entstehende **gerichtete Graph stark zusammenhängend** ist.

G ist genau dann **orientierbar**, wenn G **keine Brückenkante** hat.

1. In der Innenstadt sollen zur Hauptverkehrszeit alle Straßen zu Einbahnstraßen werden. Bleiben alle Plätze von überall erreichbar?
2. In einer Stadt sollen einzelne Straßen zur Reparatur gesperrt werden. Bleiben alle Plätze von überall erreichbar?