4.3 Verifikation von Aussagen über Algorithmen

Hoaresche Logik: Kalkül zum Beweisen von **Aussagen über Algorithmen und Programme**, Programm-**Verifikation**, [C.A.R. Hoare, 1969].

Statische Aussagen über Zustände (Werte von Variablen),
die der Algorithmus (das Programm) an bestimmten Stellen annehmen kann, z. B.
... {pegel < max} pegel := pegel + 1; ... {0<i ∧ i<10} a[i] := 42; ... {x = GGT};

Aussagen müssen beweisbar **für alle Ausführungen** des Algorithmus gelten. Im Gegensatz zum **dynamischen Testen**: Ausführen des Algorithmus für bestimmte Eingaben.

Schlussregeln für Anweisungformen erlauben logische Schlüsse über Anweisungen hinweg:
{pegel+1 ≤ max} pegel := pegel + 1; {pegel ≤ max} wegen Schlussregel für Zuweisungen

Verifikation beweist, dass

- an einer bestimmten Programmstelle eine Aussage über Zustände gilt,
- vor und nach Ausführung eines Programmstückes eine **Invariante** gilt,
- ein Algorithmus **aus jeder zulässigen Eingabe die geforderte Ausgabe** berechnet, z. B.
  { a, b ∈ ℕ } Euklidischer Algorithmus { x ist GGT von a, b }
- eine **Schleife terminiert.**

Ein **Algorithmus und dieAussagen dazu sollen zusammen konstruiert** werden.

© 2007 bei Prof. Dr. Uwe Kastens

Vorschau auf Konzepte

Aussagen charakterisieren Zustände der Ausführung

Algorithmen in informeller Notation

Schlussregeln für Anweisungsformen anwenden

Invariante von Schleifen (und anderen Konstrukten)

Schlussketten über Anweisungen hinweg verifizieren Aussagen

Nachweis der **Terminierung von Schleifen**

© 2007 bei Prof. Dr. Uwe Kastens

Beispiel zur Vorschau: Verifikation des Algorithmus ggT

Vorbedingung: x, y ∈ ℕ , d. h. x > 0, y > 0; sei G größter gemeinsame Teiler von x und y
Nachbedingung: a = G

Algorithmus mit { Aussagen über Variable }:

```
{ G ist ggT von x und y ∧ x>0 ∧ y>0 }
a := x; b := y;
{ INV: G ist ggT von a und b ∧ a>0 ∧ b>0 }
solange a ≠ b wiederhole
   { INV ∧ a ≠ b }
   falls a > b :
         { G ist ggT von a und b ∧ a>0 ∧ b>0 ∧ a>b } →
         { G ist ggT von a-b und b ∧ a-b>0 ∧ b>0 }
         a := a - b
         { INV }
   sonst
         { G ist ggT von a und b ∧ a>0 ∧ b>0 ∧ b>a } →
         { G ist ggT von a und b-a ∧ a>0 ∧ b-a>0 }
         b := b - a
         { INV }
   { INV }
{ INV ∧ a = b } →
{ a = G }
```

Terminierung der Schleife:

- a+b fällt monoton
- a+b > 0 ist Invariante

© 2007 bei Prof. Dr. Uwe Kastens

Aussage charakterisiert Programmzustände

Eine **Aussage P** an einer **Stelle in einem Algorithmus** (Programm) vor oder nach einer Anweisung ... S_1 {P} S_2 ...
charakterisiert alle Zustände, die das Programm an dieser Stelle **bei irgendeiner Ausführung** annehmen kann. P wird über **Variable des Algorithmus** formuliert.

Z. B. ... { 0 ≤ i ∧ i < 10 } a[i] := 42; ...
Bei jeder Ausführung liegt der Wert von i im angegebenen Intervall.
Eine Aussage über andere Variablen wird hier nicht gemacht.

Nur die **gerade interessierende Eigenschaften der Zustände** werden beschrieben.

Aussagen können unterschiedlich scharf formuliert werden:

{ f }	kein Zustand erfüllt P, Stelle nicht erreichbar
{ 0 ≤ i ∧ i < 2 ∧ a[i] >0 }	schärfer; evtl. weniger Zustände; schwieriger zu verifizieren
{ 0 ≤ i ∧ i < 2 }	
{ 0 ≤ i ∧ i < 10 }	
{ 0 ≤ i }	schwächer; evtl. mehr Zustände; leichter zu verifizieren
{ w }	beliebige Zustände erfüllen P

© 2007 bei Prof. Dr. Uwe Kastens

Notation von Algorithmenelementen

Anweisungsform	**Notation**	**Beispiel**
Sequenz	Anweisung_1; Anweisung_2	`a := x;` `b := y`
Zuweisung	Variable **:=** Ausdruck	`a := x`

Alternative, zweiseitig	**falls** Bedingung **:**
	Anweisung_1
	sonst Anweisung_2
		`falls a > b :`
		`a := a - b`
		`sonst b := b - a`

bedingte Anweisung	**falls** Bedingung **:** Anweisung_1	`falls a < 0 :` `a := - a`
Aufruf eines Unteralgorithmus ua	ua()	`berechneGgT()`

Schleife	**solange** Bedingung **wiederhole**
	Anweisung
		`solange a≠b wiederhole`
		`falls a > b :`
		`...`

© 2011 bei Prof. Dr. Uwe Kastens

Vor- und Nachbedingung von Anweisungen

Aussage Q charakterisiert die Zustände, die eine Ausführung zwischen den Anweisungen A_1 und A_2 annehmen kann:

$$\{ P \}\ A_1\ \{ Q \}\ A_2\ \{ R \}$$

Q ist **Nachbedingung** von A_1 und **Vorbedingung** von A_2

Beispiel: $\{ i + 1 \geq 0 \}$ **`i := i + 1;`** $\{ i \geq 0 \}$ **`a [i] := k;`** {...}

Zur Verifikation eines Algorithmus muss für jede Anweisung S ein Nachweis geführt werden:

{ Vorbedingung P } S { Nachbedingung Q }

nachweisen: Wenn vor der Ausführung der Anweisung S die Aussage P gilt, dann gilt Q nach der Ausführung von S, falls S terminiert.

Beispiel: $\{ i + 1 \geq 0 \}$ **`i := i + 1;`** $\{i \geq 0\}$ mit Zuweisungsregel nachweisen

Die Aussagen werden entsprechend der **Struktur von S verknüpft**.
Für jede Anweisungsform wird eine spezielle **Schlussregel** angewandt.

Eine **Spezifikation liefert Vorbedingung und Nachbedingung** des gesamten Algorithmus:

gegeben:	*gesucht:*
Aussagen über die Eingabe	Aussagen über Zusammenhang zwischen Ein- und Ausgabe

{ Vorbedingung }   Algorithmus   { Nachbedingung }

© 2007 bei Prof. Dr. Uwe Kastens

Zuweisungsregel

Hoare'scher Kalkül definiert **für jede Anweisungsform** eine **Schlussregel.**

Eine **Zuweisung** x := e wertet den Ausdruck e aus und weist das Ergebnis der Variablen x zu.

$$\boxed{\{ P_{[x/e]} \}\ x := e\ \{ P \}}$$

Wenn vor der Ausführung $\mathbf{P_{[x/e]}}$ gilt (P wobei x durch e substituiert ist), gilt nach der Ausführung der Zuweisung P.

Beispiele: $\{a > 0\}$ x := a $\{x > 0\}$
$\{i + 1 > 0\}$ i := i + 1 $\{i > 0\}$

Wenn man zeigen will, dass **nach der Zuweisung eine Aussage P für x** gilt, muss man zeigen, dass **vor der Zuweisung dieselbe Aussage P für e** gilt.

Beispiele im Algorithmus:

$\{ x>0 \wedge y>0 \}$
`a := x;`
$\{ a>0 \wedge y>0 \}$
`b := y;`
$\{ a>0 \wedge b>0 \}$

{ G ist ggT von a-b und b $\wedge$ a-b>0 $\wedge$ b>0 }
`a := a - b`
{ G ist ggT von a und b $\wedge$ a>0 $\wedge$ b>0 }

© 2007 bei Prof. Dr. Uwe Kastens

Beispiele für Zuweisungsregel

$\{ P_{[x/e]} \}$	x := e	{ P }	
1. $\{ a > 0 \}$	x := a	$\{ x > 0 \}$	
2. $\{ a > 0 \wedge a > 0 \}$	x := a	$\{ x > 0 \wedge a > 0 \}$	x durch a ersetzen - nicht umgekehrt
3. $\{ a > 0 \wedge x = 7 \}$	x := a	$\{ x > 0 \wedge x = 7 \}$	**falscher Schluss**! **alle** x durch a ersetzen!
4. $\{ a > 0 \wedge z > 0 \}$	x := a	$\{ x > 0 \wedge z > 0 \}$	z > 0 ist nicht betroffen
5. $\{ i + 1 > 0 \}$	i := i + 1	$\{ i > 0 \}$	
6. $\{ i \geq 0\} \leftrightarrow \{ i + 1 > 0 \}$	i := i + 1	$\{ i > 0 \}$	passend umformen
7. $\{ i = 2 \} \leftrightarrow \{ i + 1 = 3 \}$	i := i + 1	$\{ i = 3 \}$	passend umformen
8. $\{ \text{wahr} \} \leftrightarrow \{ 1 = 1 \}$	x := 1	$\{ x = 1 \}$	passend umformen
9. $\{ z = 5 \} \leftrightarrow$ $\{ z = 5 \wedge 1 = 1 \}$	x := 1	$\{ z = 5 \wedge x = 1 \}$	passend umformen

© 2007 bei Prof. Dr. Uwe Kastens

Schlussregeln für Sequenz

Sequenzregel:

$$\frac{\{P\}\ S_1\ \{Q\} \qquad \{Q\}\ S_2\ \{R\}}{\{P\}\ S_1;\ S_2\ \{R\}}$$

Bedeutung:

Wenn {P} S_1 {Q} und {Q} S_2 {R} korrekte Schlüsse sind, dann ist auch {P} S_1; S_2 {R} ein korrekter Schluss

Beispiel:

{ x>0 ∧ y>0 } `a := x;` { a>0 ∧ y>0 }

{ a>0 ∧ y>0 } `b := y;` { a>0 ∧ b>0 }

{ x>0 ∧ y>0 } `a := x; b := y;` { a>0 ∧ b>0 }

im Algorithmus die Schritte

{ x>0 ∧ y>0 }
`a := x;`
{ a>0 ∧ y>0 }

und

{ a>0 ∧ y>0 }
`b := y;`
{ a>0 ∧ b>0 }

zusammensetzen:

{ x>0 ∧ y>0 }
`a := x;`
{ a>0 ∧ y>0 }
`b := y;`
{ a>0 ∧ b>0 }

© 2011 bei Prof. Dr. Uwe Kastens

Konsequenzregeln

Abschwächung der Nachbedingung

$$\frac{\{P\}\ S\ \{R\} \qquad \{R\} \rightarrow \{Q\}}{\{P\}\ S\ \{Q\}}$$

Verschärfung der Vorbedingung

$$\frac{\{P\} \rightarrow \{R\} \qquad \{R\}\ S\ \{Q\}}{\{P\}\ S\ \{Q\}}$$

Beispiel:

{ a+b > 0 } x := a+b { x > 0 }

{ x > 0 } → { x ≥ 0}

{ a+b > 0 } x := a+b { x ≥ 0 }

im Algorithmus können Implikationen in Ausführungsrichtung eingefügt werden:

{ a+b > 0 }
x := a+b
{ x > 0 } → { 2*x ≥ 0}
y := 2*x
{ y ≥ 0}

© 2011 bei Prof. Dr. Uwe Kastens

Regel für 2-seitige Alternative

$$\frac{\{P \wedge B\}\ S_1\ \{Q\} \qquad \{P \wedge \neg B\}\ S_2\ \{Q\}}{\{P\}\ \text{falls } B\text{: } S_1 \text{ sonst } S_2\ \{Q\}}$$

Aus der **gemeinsamen Vorbedingung P** führen beide Zweige auf **dieselbe Nachbedingung Q**

Beispiel:

{ true ∧ a > 0 } b := a { b > 0 } → { b ≥ 0 }

{ true ∧¬ (a > 0) } → { -a ≥ 0 } b := - a { b ≥ 0 }

{ true } falls a > 0: b := a sonst b := - a { b ≥ 0 }

im Algorithmus:

{ a>0 ∧ b>0 ∧ a ≠ b }
`falls a > b :`
{ a>0 ∧ b>0 ∧ a>b } →
{ a-b>0 ∧ b>0 }
`a := a - b`
{ a>0 ∧ b>0 }
`sonst`
{ a>0 ∧ b>0 ∧ b>a } →
{ a>0 ∧ b-a>0 }
`b := b - a`
{ a>0 ∧ b>0 }
{ a>0 ∧ b>0 }

© 2011 bei Prof. Dr. Uwe Kastens

Regel für bedingte Anweisung

$$\frac{\{P \wedge B\}\ S\ \{Q\} \qquad P \wedge \neg B \rightarrow Q}{\{P\}\ \text{falls } B\text{ : } S\ \{Q\}}$$

Aus der **gemeinsamen Vorbedingung P** führen die Anweisung und die Implikation auf **dieselbe Nachbedingung Q**

Beispiel:

{ P ∧ a < 0 } → { -a ≥ 0 } a := - a { a ≥ 0 }

P ∧ ¬ (a < 0) → a ≥ 0

{ P } falls a < 0: a := -a { a ≥ 0 }

im Algorithmus:

{ P }
falls a < 0 :
{ P ∧ a < 0 } → { -a ≥ 0 }
a := - a;
{ a ≥ 0 }
leere Alternative:
{ P ∧¬ (a < 0)} → { a ≥ 0 }
{ a ≥ 0 }

© 2011 bei Prof. Dr. Uwe Kastens

Aufrufregel

Der **Unteralgorithmus** UA habe **keine Parameter** und liefere **kein Ergebnis**.
Seine **Wirkung auf globale Variable** sei spezifiziert durch
die **Vorbedingung P und die Nachbedingung Q**.

Dann gilt für einen **Aufruf** von UA die Schlussregel

{ P } UA() { Q }

(Ohne Parameter und Ergebnis ist diese Regel nur von sehr begrenztem Nutzen.)

© 2007 bei Prof. Dr. Uwe Kastens

Schleifenregel

Wiederholung, Schleife:

$$\frac{\{\, INV \wedge B \,\}\ S\ \{\, INV \,\}}{\{\, INV \,\}\ \textbf{solange } B \textbf{ wiederhole } S\ \{\, INV \wedge \neg B \,\}}$$

Eine Aussage P heißt **Schleifeninvariante**, wenn man zeigen kann, dass sie an folgenden Stellen gilt:
vor der Schleife,
vor und nach jeder Ausführung von S und
nach der Schleife.

Beispiel: Algorithmus zum Potenzieren

INV: $z \cdot a^b = x^y \wedge b \geq 0$

a := x; b := y; z := 1;
{ **INV** }
solange b > 0 wiederhole
  $\{ INV \wedge b > 0 \} \leftrightarrow \{ z \cdot a \cdot a^{b-1} = x^y \wedge (b-1) \geq 0 \}$
  b := b - 1;
  $\{ z \cdot a \cdot a^b = x^y \wedge b \geq 0 \}$
  z := z · a
  { **INV** }
$\{ INV \wedge b \leq 0 \} \leftrightarrow \{ z \cdot a^b = x^y \wedge b = 0 \} \rightarrow \{ z = x^y \}$

© 2011 bei Prof. Dr. Uwe Kastens

Terminierung von Schleifen

Die **Terminierung einer Schleife** solange B wiederhole S
muss separat nachgewiesen werden:

1. Gib einen **ganzzahligen Ausdruck E** an über Variablen, die in der Schleife vorkommen, und zeige, dass E bei jeder Iteration durch S **verkleinert** wird.
2. Zeige, dass **E nach unten begrenzt** ist, z. B. dass $0 \leq E$ eine Invariante der Schleife ist.

Es kann auch eine andere Grenze als 0 gewählt werden.

E kann auch monoton **vergrößert werden und nach oben begrenzt** sein.

Nichtterminierung wird bewiesen, indem man zeigt,
dass $R \wedge B$ eine Invariante der Schleife ist und
dass es eine Eingabe gibt, so dass $R \wedge B$ vor der Schleife gilt.
R kann einen speziellen Zustand charakterisieren, in dem die Schleife nicht anhält.

Es gibt Schleifen, für die man **nicht entscheiden** kann,
ob sie für jede Vorbedingung **terminieren**.

© 2007 bei Prof. Dr. Uwe Kastens

Beispiele zur Terminierung (1)

1.

	$\{ a > 0 \wedge b > 0 \}$
Schleife1	solange $a \neq b$ wiederhole
Schleife2	solange a > b wiederhole
	a := a - b;
Schleife3	solange a < b wiederhole
	b := b - a

terminiert weil:
a. INV = $a > 0 \wedge b > 0$ ist Invariante für jede der 3 Schleifen, denn

	{INV}
Schleife1	solange $a \neq b$ wiederhole $\{INV \wedge a \neq b\}$
Schleife2	solange a > b wiederhole $\{INV \wedge a > b\} \rightarrow$
	$\{a-b > 0 \wedge b > 0\}$ a := a - b; {INV}
	{INV}
Schleife3	solange a < b wiederhole $\{INV \wedge a < b\} \rightarrow$
	$\{a > 0 \wedge b-a > 0\}$ b := b - a {INV}
	{INV}
	{INV}

b. *Schleife2:* a fällt monoton, weil b > 0; a ist begrenzt, weil a > 0.
Schleife3: b fällt monoton, weil a > 0; b ist begrenzt, weil b > 0.
Schleife1: a+b fällt monoton, weil wg. $a \neq b$ Schl. 2 o. 3 mind. 1x iteriert wird;
a+b begrenzt, wg. INV.

© 2011 bei Prof. Dr. Uwe Kastens

Beispiele zur Terminierung (2)

2.

	$\{ a > 0 \wedge b > 0 \}$
Schleife1	solange $a \neq b$ wiederhole
Schleife2	solange $a \geq b$ wiederhole
	$a := a - b;$
Schleife3	solange $a < b$ wiederhole
	$b := b - a$

terminiert nicht immer:

$a > 0$ ist nicht invariant in den Schleifen.

Die Nachbedingung von Schleife 2 ist $a < b \wedge a \geq 0$.

Schleife 3 kann erreicht werden im Zustand R: $a = 0$, z.B. wenn initial $a = 2*b$ gilt.

$a = 0 \wedge a < b$ ist invariant in Schleife 3 und $a < b$ ist die Schleifenbedingung.

$\{a = 0 \wedge a < b\} \rightarrow \{a = 0 \wedge a < b-a\}$ $b := b - a$ $\{a = 0 \wedge a < b\}$

© 2011 bei Prof. Dr. Uwe Kastens

Beispiele zur Terminierung (3)

3.

$\{ n \in \mathbb{N} \wedge n > 1 \}$
solange $n > 1$ wiederhole
    falls n gerade:
        $n := n / 2$
    sonst $n := 3 * n + 1$

Terminierung / Nichtterminierung ist unbewiesen;
einige Ausführungen mit Anfangswerten n:

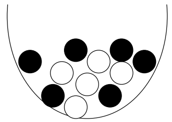
n	
2	1
3	10 5 16 8 4 2 1
4	2 1
5	16 8 4 2 1
6	3 10 5 16 8 4 2 1
7	22 11 34 17 52 26 13 50 25 76 38 19 ...

© 2011 bei Prof. Dr. Uwe Kastens

Denksportaufgabe zu Invarianten

In einem Topf seien s schwarze und w weiße Kugeln, $s + w > 0$

solange mindestens 2 Kugeln im Topf sind
- nimm 2 beliebige Kugeln heraus
- falls sie gleiche Farbe haben:
  - wirf beide weg und
  - lege eine neue schwarze Kugel in den Topf
- falls sie verschiedene Farben haben:
  - lege die weiße Kugel zurück in den Topf und
  - wirf die schwarze Kugel weg



Welche Farbe hat die letzte Kugel?

Finden Sie Invarianten, die die Frage beantworten.

© 2007 bei Prof. Dr. Uwe Kastens

Schrittweise Konstruktion und Verifikation

Vorbedingung: $x \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}_0$
Nachbedingung: $q = x^n$

Algorithmus:

$\{ n \geq 0 \} \rightarrow \{ n = n \wedge n \geq 0 \wedge x = x \wedge 1 = 1 \}$
```
a := x; q := 1; i := n;
```
$\{ i = n \wedge i \geq 0 \wedge a = x \wedge q = 1 \} \rightarrow \{ \text{INV} \}$
```
solange i > 0 wiederhole
```
$\{ \text{INV} \wedge i > 0 \}$
```
falls i ungerade:
```
$\{ \text{INV} \wedge i > 0 \wedge i \text{ ungerade} \} \rightarrow$
$\{ x^n = q * a * (a^2)^{i/2} \wedge i > 0 \}$ `q := q * a;` $\{ x^n = q * (a^2)^{i/2} \wedge i > 0 \}$
leere Alternative für i gerade:
$\{ \text{INV} \wedge i > 0 \wedge i \text{ gerade} \} \rightarrow \{ x^n = q * (a^2)^{i/2} \wedge i > 0 \}$
$\{ x^n = q * (a^2)^{i/2} \wedge i > 0 \}$
```
a := a * a;
```
$\{ x^n = q * a^{i/2} \wedge i > 0 \} \rightarrow \{ x^n = q * a^{i/2} \wedge i/2 \geq 0 \}$
```
i := i / 2
```
$\{ x^n = q * a^i \wedge i \geq 0 \} \leftrightarrow \{ \text{INV} \}$
$\{ \text{INV} \wedge i \leq 0 \} \rightarrow \{ q = x^n \}$

Konstruktionsidee:

Invariante INV: $x^n = q * a^i \wedge i \geq 0$
Zielbedingung: $i \leq 0$

falls i gerade: $x^n = q * (a^2)^{i/2}$
falls i ungerade: $x^n = q * a * (a^2)^{i/2}$

Schritte:
1. Vor-, Nachbedingung
2. Schleifeninvariante
3. Schleife mit INV
4. Initialisierung
5. Idee für Schleifenrumpf
6. Alternative
7. Schleife komplett
8. Terminierung

Terminierung der Schleife: i fällt monoton und $i \geq 0$ ist invariant.

© 2011 bei Prof. Dr. Uwe Kastens