3 Terme und Algebren
3.1 Terme

In allen formalen Kalkülen benutzt man **Formeln als Ausdrucksmittel**.
Hier betrachten wir **nur ihre Struktur - nicht ihre Bedeutung**. Wir nennen sie **Terme**.

Terme bestehen aus **Operationen**, **Operanden**, **Konstanten und Variablen**:

a + 5 blau ? gelb = grün ♥ > ♦

Terme werden nicht „ausgerechnet“.
Operationen, Konstanten und Variablen werden als **Symbole ohne Bedeutung** betrachtet.

Notation von Termen:

Infix-, **Postfix**-, **Präfix**- und **Baum**-Form

Umformung von Termen:

Grundlage für die Anwendung von Rechenregeln, Gesetzen

Für **Variable** in Termen werden Terme **substituiert:**

in a + a = 2∗a substituiere a durch 3∗b 3∗b + 3∗b = 2∗3∗b

Unifikation: Terme durch Substitution von Variablen gleich machen,
z. B. um die Anwendbarkeit von Rechenregeln zu prüfen

Sorten und Signaturen

Terme werden zu einer **Signatur** gebildet.
Sie legt die verwendbaren Symbole und die Strukturierung der Terme fest.

Signatur Σ := (S, F), S ist eine Menge von **Sorten**, F ist eine Menge von **Operationen**.

Eine **Sorte s** $\in$ **S** ist ein **Name für eine Menge von Termen**, z. B. ARITH, BOOL;
verschiedene Namen benennen disjunkte Mengen

Eine **Operation f** $\in$ **F** ist ein **Operatorsymbol**, beschrieben durch
Anzahl der Operanden (**Stelligkeit)**,
Sorten der Operanden und **Sorte des Ergebnisses**

0-stellige Operatoren sind Konstante, z. B. true, 1

Beispiele:

einzelne Operatoren:

Name	**Operandensorten**	**Ergebnissorte**
+:	ARITH x ARITH	-> ARITH
<:	ARITH x ARITH	-> BOOL
$\wedge$:	BOOL x BOOL	-> BOOL
true:		-> BOOL
1:		-> ARITH

Signatur Σ_{BOOL} := (S_{BOOL}, F_{BOOL})

S_{BOOL} := { BOOL },
F_{BOOL} :=
{ true: -> BOOL,
false: -> BOOL,
$\wedge$: BOOL x BOOL -> BOOL,
$\neg$: BOOL -> BOOL
}

Korrekte Terme

In **korrekten Termen** muss jeweils die Zahl der Operanden mit der **Stelligkeit** der Operation und die **Sorten** der Operandenterme mit den Operandensorten der Operation übereinstimmen.

Induktive Definition der **Menge τ der korrekten Terme der Sorte s zur Signatur Σ = (S, F)**:
Sei die Signatur Σ = (S, F). Dann ist t ein **korrekter Term der Sorte s$\in$ S**, wenn gilt

- t = **v** und v ist der **Name einer Variablen** der Sorte s, oder
- t = **f (t_1, t_2, .., t_n)**, also die **Anwendung einer n-stelligen Operation**

  f: $s_1 \times s_2 \times ... \times s_n \rightarrow s \in F$

  wobei jedes **t_i ein korrekter Term der Sorte s_i** ist

  mit $n \geq 0$ (einschließlich Konstante f bei n = 0) und $i \in \{1, ..., n\}$

f (t_1,..., t_n) ist ein **n-stelliger Term**; die t_i sind seine **Unterterme**.

Korrekte Terme**,** die **keine Variablen** enthalten, heißen **Grundterme**.

Beispiele: korrekte Terme zur Signatur Σ_{BOOL}:

false $\neg$ true true $\wedge$ x $\neg$(a $\wedge$ b) x $\wedge \neg$ y

nicht korrekt:a $\neg$ b $\neg$ ($\wedge$ b)

Notationen für Terme

Notation eines n-stelligen Terms mit Operation (Operator) f und Untertermen t_1, t_2, ..., t_n:

Bezeichnung	**Notation**	**Beispiele**
Funktionsform:	Operator **vor der geklammerten Folge** seiner Operanden $f\ (t_1, t_2, ..., t_n)$	$\wedge\ (<(0, a), \neg\ (<(a, 10)))$
Präfixform:	Operator **vor** seinen Operanden $f\ \ t_1\ \ t_2\ ...\ t_n$	$\wedge\ <\ 0\ \ a\ \ \neg <\ \ a\ \ 10$
Postfixform:	Operator **nach** seinen Operanden $t_1\ \ t_2\ ...\ t_n\ \ f$	$0\ a\ <\ a\ 10\ <\neg\ \wedge$
Infixform	2-stelliger Operator **zwischen** seinen (beiden) Operanden $t_1\ f\ \ t_2$	$0 < a\ \wedge\ \neg\ a < 10$

Die **Reihenfolge der Operanden** ist in allen vier Notationen **gleich**.

Präzedenzen und Klammern für Infixform

Die **Infixform** benötigt **Klammern** oder **Präzedenzen**, um Operanden an ihren Operator zu binden: Ist in x **+** 3 ***** y die 3 rechter Operand des **+** oder linker Operand des ***** ?

Klammern beeinflussen die Struktur von Termen in der Infixform:

z. B. (x **+** 3) ***** y oder x **+** (3 ***** y)

Redundante Klammern sind zulässig.

Ein Term ist **vollständig geklammert**, wenn er und jeder seiner Unterterme geklammert ist:

z. B. ((x) **+** ((3) ***** (y)))

Für die **Infixform** können den Operatoren unterschiedliche **Bindungsstärken (Präzedenzen)** zugeordnet werden, z. B. bindet ***** seine Operanden vereinbarungsgemäß stärker an sich als **+**, d. h. ***** hat **höhere Präzedenz** als **+**.

Damit sind x **+** 3 ***** y und x **+** (3 ***** y) verschiedene Schreibweisen für denselben Term.

Für **aufeinanderfolgende Operatoren gleicher Präzedenz** muss geregelt werden, ob sie ihre Operanden **links-assoziativ** oder **rechts-assoziativ** binden:

links-assoziativ: x **+** 3 **+** y steht für (x **+** 3) **+** y

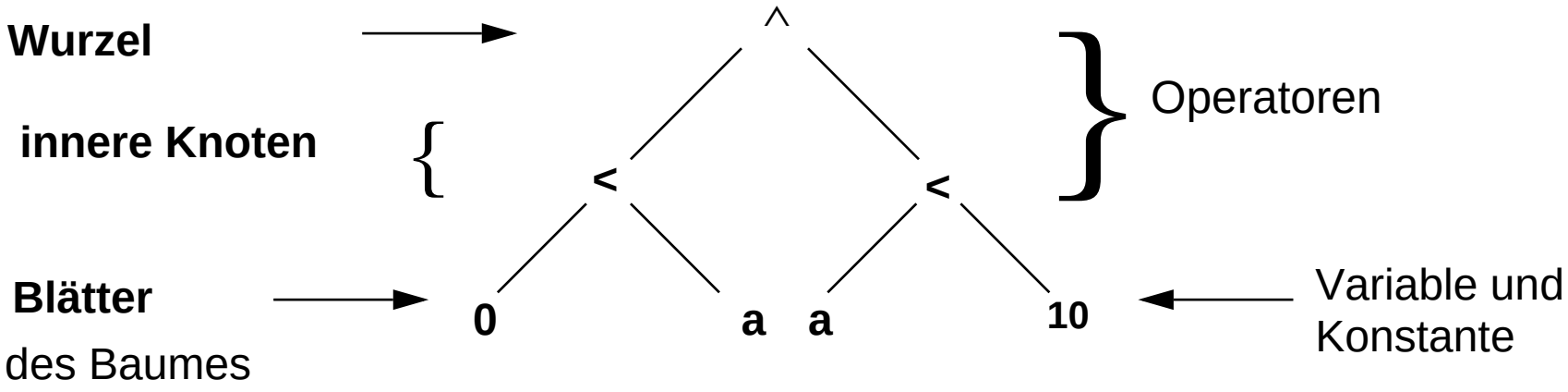
rechts-assoziativ: x ****** 3 ****** y steht für x ****** (3 ****** y)

Funktionsform, Präfixform, Postfixform benötigen weder
Regeln für Präzedenz oder Assoziativität noch zusätzliche Klammern!

Terme als Bäume

Terme kann man als Bäume darstellen (**Kantorowitsch-Bäume**):

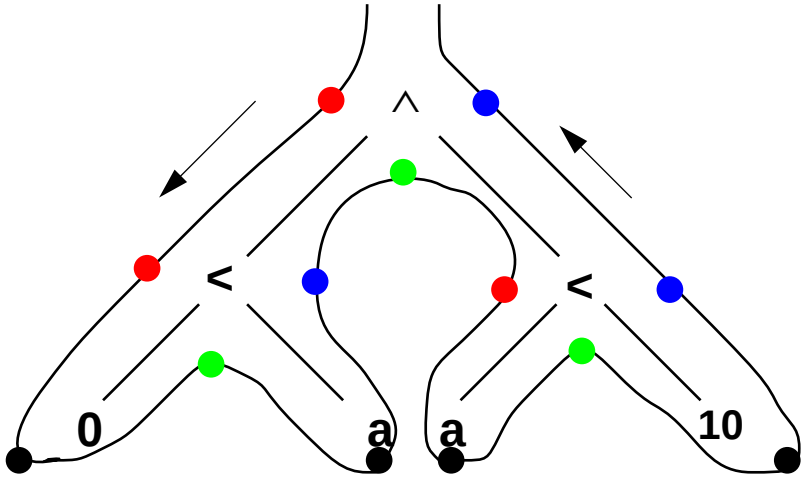
Term: $\mathbf{0 < a \wedge a < 10}$



Aus einem Durchlauf des Baumes in Pfeilrichtung erzeugt man

- **Präfixform**, wenn man beim **ersten Besuch**
- **Postfixform**, wenn man beim **letzten Besuch**
- **Infixform**, wenn man beim **vorletzten Besuch** (bei **2-stelligen** Operatoren)

den Operator aufschreibt.



Substitution und Unifikation

Eine **Substitution** beschreibt, wie in einem Term vorkommende **Variablen durch Terme ersetzt** werden.

Eine **einfache Substitution** σ **= [v / t]** ist ein Paar aus einer Variablen v und einem Term t zur Signatur $\sum$. v und t müssen **dieselbe Sorte** s haben.
Beispiel: σ = [x / 2*****b]

Die **Anwendung einer Substitution** σ **auf einen Term** u schreibt man **u** σ, z. B. (x+1) [x / 2*****b].

Die **Anwendung einer einfachen Substitution u** σ mit σ **= [v / t]**, ist **definiert** durch

- **u [v / t] = t** , falls u die zu ersetzende Variable v ist,
- **u [v / t] = u** , falls u $\neq$ v und u eine Konstante oder eine andere Variable ist,
- **u [v / t] = f (u_1 [v / t], u_2 [v / t], ..., u_n [v / t])** , falls u = f (u_1, u_2, ..., u_n)

D. h. in u werden **alle Vorkommen der Variablen v gleichzeitig durch den Term t ersetzt**.

Kommt v auch in t vor, so wird es nicht nochmals ersetzt!

Beispiele: (x + 1) [x / 2*****b] = (2*****b + 1)

(x - x) [x / 3] = (3 - 3)

(x + y) [y / y*****y] = (x + y*****y)

Mehrfache Substitution

In einer **mehrfachen Substitution** $\sigma = [\ v_1 / t_1, ..., v_n / t_n]$ müssen alle Variablen v_i paarweise verschieden sein. In jedem v_i / t_i müssen v_i und t_i jeweils derselben Sorte s_i angehören.
σ wird dann auf einen Term u wie folgt angewandt:

- $u\ \sigma = t_i$, falls $u = v_i$ für ein $i \in \{1, ..., n\}$,
- $u\ \sigma = u$, falls u eine Konstante ist oder eine Variable, die nicht unter v_i für ein $i \in \{1, ..., n\}$ vorkommt,
- $u\ \sigma = f\ (u_1\ \sigma, u_2\ \sigma, ..., u_n\ \sigma)$, falls $u = f\ (u_1, u_2, ..., u_n)$

D. h. σ ist die gleichzeitige Substitution aller Vorkommen jeder Variablen v_i jeweils durch den Term t_i.

Beispiele: $\sigma = [\ x / 2*b, y / 3\ ]$

$(x + y)\ \sigma = (2*b + 3)$
$(y + a*y)\ \sigma = (3 + a*3)$
$(x * y)\ [\ x / y,\ \ y / y*y\ ] = (y * (y * y))$

Die **leere Substitution** wird **[ ]** notiert. Für alle Terme t gilt **t [ ] = t**.
Außerdem gilt **[v / v] = [ ]** für jede Variable v.

Hintereinanderausführung von Substitutionen

Auf einen Term können **mehrere Substitutionen hintereinander** ausgeführt werden,

z. B. $u\ \sigma_1\ \sigma_2\ \sigma_3 = ((u\ \sigma_1)\ \sigma_2)\ \sigma_3$

$(x+y)\ [x/y*x]\ [y/3]\ [x/a] = (y*x+y)\ [y/3]\ [x/a] = (3*x+3)\ [x/a] = (3*a+3)$

Mehrere **Substitutionenen hintereinander** können als **eine Substitution** angesehen werden:

z. B. $u\ \sigma_1\ \sigma_2\ \sigma_3 = u\ (\sigma_1\ \sigma_2\ \sigma_3) = u\ \sigma$

Mehrere **einfache Substitutionen hintereinander** kann man **in eine mehrfache Substitution** mit gleicher Wirkung umrechnen:

Die Hintereinanderausführung $[\ x_1 / t_1, ..., x_n / t_n\ ]\ [\ y / r\ ]$

hat auf jeden Term die gleiche Wirkung wie

falls y unter den x_i vorkommt $[\ x_1 / (t_1[\ y / r\ ]), ..., x_n / (t_n\ [\ y / r\ ])]$

falls y nicht unter den x_i vorkommt $[\ x_1 / (t_1[\ y / r\ ]), ..., x_n / (t_n\ [\ y / r\ ]), y / r\ ]$

Beispiel: $[\ x / y*x\ ]\ [\ y / 3\ ]\ [\ x / a\ ] = [\ x / 3*x, y / 3]\ [\ x / a\ ] = [\ x / 3*a, y / 3\ ]$

Umfassende Terme

Rechenregeln werden mit **allgemeineren Termen** formuliert, die auf **speziellere Terme** angewandt werden,

z. B. Distributivgesetz:	$a * (b + c)$	$=$	$a * b + a * c$
angewandt auf	$2 * (3 + 4*x)$	$=$	$2 * 3 + 2 * 4*x$

Ein **Term s umfasst einen Term t**, wenn es eine Substitution σ gibt, die s in t umformt: $s\ \sigma = t$

s umfasst t, ist eine **Quasiordnung**, d. h. die Relation **umfasst** ist

transitiv: sei $r\ \sigma_1 = s$, $s\ \sigma_2 = t$, dann ist $r\ (\sigma_1\ \sigma_2) = t$

reflexiv: $t\ [\ ] = t$, mit der leeren Substitution [ ]

Eine **Halbordnung ist umfasst nicht**, weil

nicht antisymmetrisch: Terme, die sich nur in den Variablennamen unterscheiden, kann man ineinander umformen, z. B.
$2*x\ [\ x / y\ ] = 2*y$ und $2*y\ [\ y / x\ ] = 2*x$

Deshalb gilt zwar der allgemeinere Term $a * (b + c)$ umfasst den spezielleren $2 * (3 + 4*x)$, aber nicht immer ist ein Term s allgemeiner als ein Term t, wenn s umfasst t: $2**x$ und $2**y$

Unifikation

Die **Unifikation substituiert zwei Terme, sodass sie gleich werden**.

Zwei Terme s und t sind unifizierbar, wenn es eine Substitution σ gibt mit s σ = t σ.
σ heißt **Unifikator von s und t**.

Beispiel: Terme: s = (x + y) t = (2 + z)
Unifikatoren: σ_1 = [x / 2, y / z] σ_2 = [x / 2, z / y],
σ_3 = [x / 2, y / 1, z / 1] σ_4 = [x / 2, y / 2, z / 2] ...

Ist σ **ein Unifikator** von s und t und τ **eine Substitution**, dann ist auch die Hintereinanderausführung $\sigma\ \tau = \sigma$‘ auch ein Unifikator von s und t.

Ein **Unifikator σ heißt allgemeinster Unifikator** der Terme s und t, wenn es zu allen anderen Unifikatoren σ‘ eine Substitution τ gibt mit $\sigma\ \tau = \sigma$‘.

Im Beispiel sind σ_1 und σ_2 allgemeinste Unifikatoren, z. B. σ_1 [z / 1] = σ_3

Es kann **mehrere allgemeinste Unifikatoren** geben. Sie können durch **Umbenennen von Variablen** ineinander überführt werden, z. B.

σ_1 [**z / y**] = [x / 2, y / z] [z / y]= [x / 2, y / y, z / y] = [x / 2, z / y] = σ_2

Unifikationsverfahren

Unifikation zweier Terme s und t nach Robinson:

Seien s und t Terme in **Funktionsschreibweise**.
Dann ist das **Abweichungspaar A(s, t) = (u, v)** das erste Paar unterschiedlicher, korrespondierender Unterterme u und v, das man beim Lesen von links nach rechts antrifft.

Algorithmus:

1. Setze σ = [ ] (leere Substitution)
2. Solange es ein Abweichungspaar A(s σ, t σ) = (u, v) gibt wiederhole:
   a. ist **u eine Variable x**, die in v nicht vorkommt, dann ersetze σ durch σ [x / v], oder
   b. ist **v eine Variable x**, die in u nicht vorkommt, dann ersetze σ durch σ [x / u],
   c. **sonst** sind die Terme s und t **nicht unifizierbar; Abbruch** des Algorithmus.
3. Bei Erfolg gilt s σ = t σ und σ **ist allgemeinster Unifikator**.

Beachte, dass bei jeder Iteration die bisherige Substitution auf die vollständigen Terme s, t angewandt wird.

Beispiel für Unifikationsverfahren

Unifikation zweier Terme s und t nach Robinson:

s = + (***** (2, x), 3)
t = + (z, x)

σ = [ ]

Schritt ↓ Abweichungspaar

1 s σ = + (***** (2, x), 3)
t σ = + (z, x)

Fall 2b: σ = [ ] [z / ***** (2, x)]

↓ Abweichungspaar

2 s σ = + (***** (2, x), 3)
t σ = + (***** (2, x), x)

Fall 2b: σ = [ ] [z / ***** (2, x)] [x / 3]

3 s σ = + (***** (2, 3), 3)
t σ = + (***** (2, 3), 3)

allgemeinster Unifikator: σ = [z / ***** (2, x)] [x / 3] =
[z / ***** (2, 3), x / 3]

3.2 Algebren

Eine **Algebra** ist eine **formale Struktur,** definiert durch
eine **Trägermenge**, **Operationen** darauf und **Gesetze** zu den Operationen.

In der Modellierung der Informatik spezifiziert man mit Algebren
Eigenschaften veränderlicher Datenstrukturen und dynamische Systeme,
z. B. Datenstruktur *Keller* oder die Bedienung eines Getränkeautomaten.

Wir unterscheiden 2 Ebenen: **abstrakte Algebra** und **konkrete Algebra**:

Eine **abstrakte Algebra** spezifiziert Eigenschaften **abstrakter Operationen**,
definiert nur duch eine **Signatur** - Realisierung durch Funktionen bleibt absichtlich offen

Trägermenge: korrekte Terme zu der Signatur

Gesetze erlauben, Vorkommen von Termen durch andere Terme zu ersetzen
z. B. ¬ false –> true pop (push (k, t)) –> k

Eine **konkrete Algebra** zu einer abstrakten Algebra

definiert **konkrete Funktionen** zu den Operationen der Signatur,
so dass die Gesetze in **Gleichungen zwischen den Funktionstermen** übergehen.

Sie beschreibt so eine **Implementierung** der spezifizierten Datenstruktur,
bzw. des Systems

Abstrakte Algebra

Eine **abstrakte Algebra A = (τ, Σ, Q)** ist definiert durch die **Menge korrekter Terme** τ zur **Signatur** Σ und eine **Menge von Axiomen (Gesetzen) Q**.

Axiome haben die Form t_1 -> t_2, wobei t_1, t_2, **korrekte Terme gleicher Sorte** sind, die **Variablen** enthalten können. Die Algebra definiert, wie man Terme **mit den Axiomen in andere Terme umformen** kann.

Mit Axiomen umformen heißt: Unter Anwenden eines Axioms t_1 -> t_2 kann man einen Term s_1 in einen Term s_2 umformen. Wir schreiben s_1 -> s_2, wenn gilt:

- s_1 und s_2 stimmen in ihren „äußeren“ Strukturen überein und unterscheiden sich nur durch die Unterterme r_1 und r_2 an entsprechenden Positionen in s_1 und s_2, und
- es gibt eine Substitution σ , sodass gilt t_1 σ = r_1 und t_2 σ = r_2

Terme	s_1 =	..... r_1	->	..... r_2	=	s_2
		=		=		
		t_1 σ		t_2 σ		
Axiom		t_1	->	t_2		

s ist in t umformbar, wenn es eine endliche Folge von Termen s = s_0, s_1, ..., s_n = t mit s_{i-1} -> s_i gibt; wir schreiben dann s -> t.

„->“ ist **transitiv**. Wenn es auch **irreflexiv** ist (so sollten die Axiome gewählt werden), ist es eine **strenge Halbordnung**.

Beispiel: abstrakte Algebra Bool

Signatur Σ = ({BOOL}, F)

Operationen F:

true:		-> BOOL
false:		-> BOOL
$\wedge$:	BOOL x BOOL	-> BOOL
$\vee$:	BOOL x BOOL	-> BOOL
$\neg$:	BOOL	-> BOOL

Axiome Q: für alle x,y der Sorte BOOL gilt

Q_1:	$\neg$ true	–> false
Q_2:	$\neg$ false	–> true
Q_3:	true $\wedge$ x	–> x
Q_4:	false $\wedge$ x	–> false
Q_5:	x $\vee$ y	–> $\neg$ ($\neg$ x $\wedge$ $\neg$ y)

Die Axiome sind geeignet, alle korrekten Terme ohne Variablen in in einen der beiden Terme **true** oder **false** umzuformen.

true und **false** heißen **Normalformen** (siehe Folie 3.20).

Konkrete Algebra

Zu einer abstrakten Algebra $A_a = (\tau, (S, F), Q)$, kann man

konkrete Algebren wie $\mathbf{A_k = (W_k, F_k, Q)}$

angeben, wobei

W_k eine **Menge von Wertebereichen** ist, je einer **für jede Sorte** aus S,

F_k eine **Menge von Funktionen** ist, je eine **für jede Operation** aus F.

Die Definitions- und Bildbereiche der Funktionen müssen konsistent den Sorten der Operationen zugeordnet werden.

Den **Axiomen Q** müssen **Gleichungen zwischen den Funktionstermen** in den Wertebereichen entsprechen.

Es können in der konkreten Algebra noch weitere Gleichungen gelten.

Eine konkrete Algebra heißt auch **Modell der abstrakten Algebra**.

Beispiel für eine konkrete Algebra

Beispiel: eine konkrete Algebra FSet zur abstrakten Algebra Bool:

	konkrete Algebra FSet	**abstrakte Algebra Bool**
W_k:	$\{\emptyset, \{1\}\}$	Sorte BOOL
F_k:	$\{1\}$	true
	$\emptyset$	false
	Mengendurchschnitt $\cap$	$\wedge$
	Mengenvereinigung $\cup$	$\vee$
	Mengenkomplement bezüglich {1}	$\neg$

Axiome Q:
Man kann zeigen, dass die Axiome Gleichungen zwischen den Termen in W_k entsprechen:

z. B. $\emptyset \cap x = \emptyset$ entspricht false $\wedge$ x -> false

Die boolesche Algebra mit den üblichen logischen Funktionen ist natürlich auch eine konkrete Algebra zur abstrakten Algebra Bool.

Beispiel 2.2: Datenstruktur Keller

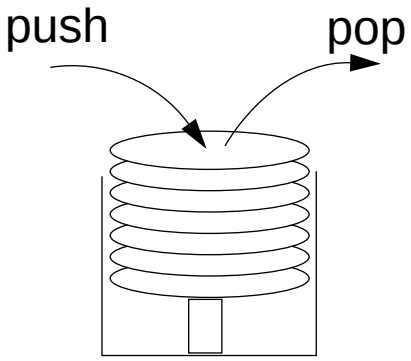
Die Eigenschaften einer **Datenstruktur Keller** beschreiben wir zunächst informell.
Folgende **Operationen** kann man mit einem Keller ausführen:

create Stack:	liefert einen leeren Keller
push:	fügt ein Element in den Keller ein
pop:	entfernt das zuletzt eingefügte Element
top:	liefert das zuletzt eingefügte und nicht wieder entfernte Element
empty:	gibt an, ob der Keller leer ist.

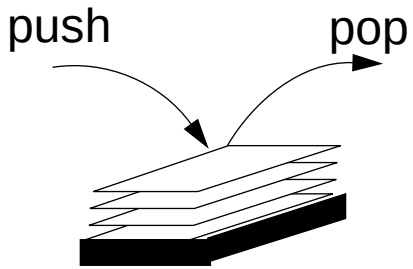
Die Eigenschaften der Datenstruktur Keller sollen präzise durch eine abstrakte Algebra spezifiziert werden.

Beispiele

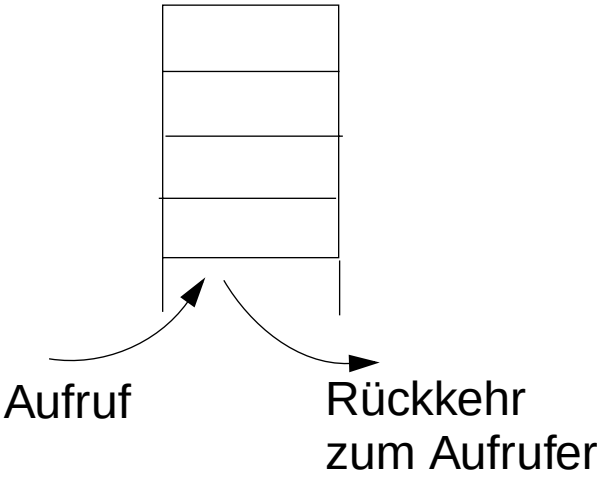
Tellerstapel



Aktenstapel



Laufzeitkeller



Beispiel: Abstrakte Algebra spezifiziert Keller

Abstrakte Algebra Keller:

Signatur $\Sigma = (S, F)$,
Sorten S = {Keller, Element, BOOL},
Operationen F:

createStack:		-> Keller
push:	Keller x Element	-> Keller
pop:	Keller	-> Keller
top:	Keller	-> Element
empty:	Keller	-> BOOL

Axiome Q: für beliebige Terme t der Sorte Element und k der Sorte Keller gilt:

K1:	empty (createStack)	-> true
K2:	empty (push (k, t))	-> false
K3:	pop (push (k, t))	-> k
K4:	top (push (k, t))	-> t

Keller ist die Sorte, deren Terme Kellerinhalte modellieren.
Element und BOOL sind **Hilfssorten** der Algebra.

Implementierungen der abstrakten Algebra Keller können durch **konkrete Algebren** dazu beschrieben werden.

Klassifikation von Operationen

Die Operationen einer Algebra werden in 3 disjunkte Mengen eingeteilt:

Konstruktoren: Ergebnissorte ist die definierte Sorte

Hilfskonstruktoren: Ergebnissorte ist die definierte Sorte und sie können durch Axiome aus Termen entfernt werden

Projektionen: andere Ergebnissorte

z. B. in der Keller-Algebra: definierte Sorte ist Keller

createStack:		-> Keller	**Konstruktor**
push:	Keller x Element	-> Keller	**Konstruktor**
pop:	Keller	-> Keller	**Hilfskonstruktor** (K3 entfernt ihn)
top:	Keller	-> Element	**Projektion**
empty:	Keller	-> BOOL	**Projektion**

Normalform

Terme ohne Variable der definierten Sorte sind in **Normalform**, wenn sie nur **Konstruktoren** enthalten **kein Axiom anwendbar** ist.

Normalform-Terme der Algebra Bool sind: true false

Normalform-Terme der Keller-Algebra haben die Form:
push (.... push (createStack, n_1) , ...), n_m), mit $m \geq 0$

Die **Terme in Normalform** sind die minimalen Elemente bzgl. der strengen Halbordnung ->.

Terme s, t, die in **dieselbe Normalform** umformbar sind, heißen **gleichbedeutend**, $s \equiv t$.

Undefinierte Terme:

Terme der definierten Sorte, die man **nicht in eine Normalform** umformen kann, werden als **undefiniert** angesehen. Sie modellieren eine **Fehlersituation**, z. B. pop (createStack)

Für manche **Projektionen** gibt es nicht zu jedem Term in Normalform ein anwendbares Axiom; dies modelliert auch **Fehlersituationen**, z. B. top (createStack)

Anwendungen algebraischer Spezifikationen: Eigenschaften aus den Axiomen erkennen

Beispiel: Keller

1. K3: pop (push (k, t)) -> k

   Keller-Prinzip: zuletzt eingefügtes Element wird als erstes wieder entfernt (last-in-first-out, LIFO)

2. top: Keller -> Element
   K4: top (push (k, t)) -> t

   top ist die einzige Operation, die Keller-Elemente liefert:
   Nur auf das zuletzt eingefügte, nicht wieder entfernte Element kann **zugegriffen** werden.

3. push (.... push (createStack, n_1) , ...), n_m), mit $m \geq 0$
   K3: pop (push (k, t)) -> k

   Zählt man in einem Term von innen nach außen die push-Operationen positiv und die pop-Operationen negativ, und ist der Wert immer nicht-negativ, so ergibt sich die **Anzahl der Elemente im Keller**, andernfalls ist der Term undefiniert.
   Begründung: Rückführung auf Normalform, eine push-Operation für jedes Element im Keller.

Spezifikation um Operationen erweitern

Erweitere die Keller-Spezifikation um eine **Operation size**.
Sie soll die **Anzahl der Elemente im Keller** liefern.

1. Operation **size in die Signatur einfügen:**
   size: Keller -> NAT

2. Ergebnis-Sorte **NAT zu den Sorten zufügen**:
   S = {Keller, Element, BOOL, NAT}

3. **Axiome zufügen**, so dass size für jeden Keller-Wert definiert ist:
   K7: size (createStack) -> null
   K8: size (push (k, t)) -> succ (size (k))

4. Weil in der **Normalform** nur createStack und push vorkommen, braucht size nur für solche Terme definiert zu werden.

Dabei wird vorausgesetzt, dass folgende Algebra bekannt ist:
Sorten: S = {NAT}
Operationen: null: -> NAT, succ: NAT -> NAT
(succ (n) modelliert den Nachfolger von n, also n + 1.)

Realisierung der Spezifikation durch eine konkrete Algebra

Beispiel: eine Realisierung von Kellern durch **Funktionen auf Folgen** von natürlichen Zahlen:

Zuordnung der Sorten:

konkret	**abstrakt**
Bool	BOOL
$\mathbb{N}_0$	Element
N-Folge = $\mathbb{N}^*$	Keller

Signatur und **Zuordnung von Funktionen**

konkret			**abstrakt**
newFolge:		-> N-Folge	createStack
append:	N-Folge x $\mathbb{N}_0$	-> N-Folge	push
remove:	N-Folge	-> N-Folge	pop
last:	N-Folge	-> $\mathbb{N}$	top
noElem:	N-Folge	-> Bool	empty

Definition der Funktionen

newFolge( )	-> ()
append ($(a_1, ..., a_n)$, x)	-> $(a_1, ..., a_n, x)$
remove ($(a_1, ..., a_{n-1}, a_n)$)	-> $(a_1, ..., a_{n-1})$
last ($(a_1, ..., a_n)$)	-> a_n
noElem (f)	-> f = ()

Gültigkeit der Axiome zeigen

Keller in Algorithmen einsetzen

Aufgabe: Terme aus **Infixform in Postfixform** umwandeln

gegeben: Term t in Infixform, mit 2-stelligen Operatoren unterschiedlicher Präzedenz; (zunächst) ohne Klammern

gesucht: Term t in Postfixform

Eigenschaften der Aufgabe und der Lösung:

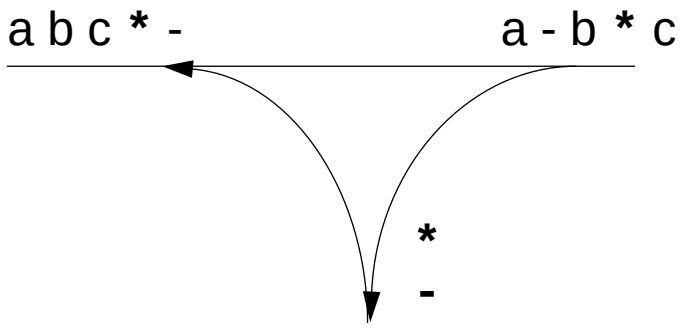
1. **Reihenfolge der Variablen und Konstanten bleibt unverändert**
2. **Variablen und Konstanten werden vor ihrem Operator ausgegeben**, also sofort
3. In der Infixform aufeinander folgende **Operatoren echt steigender Präzedenz** stehen in der Postfixform **in umgekehrter Reihenfolge**; also kellern.
4. **Operatorkeller enthält Operatoren echt steigender Präzedenz**.
   Es gilt die **Kellerinvariante KI**:
   Sei push (... push (CreateStack, opr_1), opr_2), ...) dann gilt
   Präzedenz (opr_i) < Präzedenz (opr_{i+1})

Algorithmus: Infix- in Postfixform wandeln

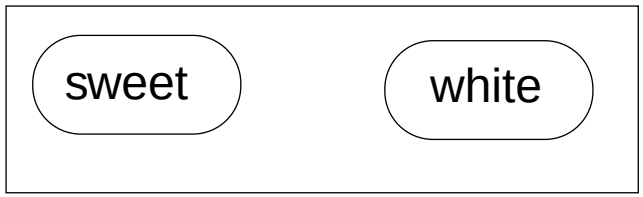
Die Eingabe enthält einen Term in Infixform;
die Ausgabe soll den Term in Postfixform enthalten

```
Variable: keller ∈ Keller; symbol ∈ Operator ∪ ElementarOperand

keller = createStack();
solange Eingabe nicht leer wiederhole                    {KI}
        lies symbol
        falls symbol ∈ ElementarOperand
                gib symbol aus
        falls symbol ∈ Operator                          {KI}
                solange  not empty (keller) ∧
                         Präzedenz (top (keller)) ≥ Präzedenz (symbol)
                wiederhole                               {KI}
                         gib top (keller) aus;
                         keller = pop (keller);
                keller = push(keller, symbol);           {KI}

solange not empty (keller) wiederhole
        gib top(keller) aus;
        keller = pop(keller);
```

An den Stellen {KI} gilt die Kellerinvariante.



Abstrakte Algebra für Teilaspekt des Getränkeautomaten



Knöpfe des Getränkeautomaten
zur Auswahl von Zutaten

Signatur $\Sigma = (S, F)$;

Sorten S := {Add, Choice}

Operationen F:

sweet:	-> Add
white:	-> Add
noChoice:	-> Choice
press: Add x Choice	-> Choice

Die Sorte **Choice** modelliert die Auswahl;
Add ist eine Hilfssorte

Bedeutung der Axiome:

Q_1: Knopf nocheinmal drücken macht Auswahl rückgängig.

Q_2: Es ist egal, in welcher Reihenfolge die Knöpfe gedrückt werden.

Axiome Q: für alle a der Sorte Add und
für alle c der Sorte Choice gilt:

Q_1: press (a, press (a, c)) -> c

Q_2: press (sweet, press (white, c)) ->
press (white, press (sweet, c))

Beispiel-Terme: press (white, noChoice)
press (sweet, press (white, press (sweet, noChoice)))