2x Beweise verstehen und konstruieren

Beweise werden in vielen Gebieten der Informatik benötigt

- innerhalb von **Informatik-Theorien**
  z.B. Komplexität von Aufgaben und Algorithmen
- **Eigenschaften von modellierten Aufgaben**
  z.B. Falls ein ungerichteter Graph zusammenhängend ist, gibt es mindestens einen Weg von Knoten a nach Knoten b.
- **Entwurf von Hardware und Software**
  z.B. Diese Synchronisation der „Dining Philosophers“ führt nie zur Verklemmung.
- **Eigenschaften implementierter Software oder Hardware**
  Verifikation von Programmeigenschaften

Dieses Thema wird im Buch „Modellierung“ im Abschnitt 4.3 behandelt.

Beispiel 1

Satz 2x.1:

Seien A und B zweistellige, antisymmetrische Relationen über der Menge M. Dann ist $C = A \cup B$ auch eine antisymmetrische Relation.

Beweis:

Wegen der Definition von antisymmetrisch gilt:
Für alle $x, y \in M$ gilt: Aus $x A y$ und $y A x$ folgt $x = y$.

Ebenso gilt:
Für alle $x, y \in M$ gilt: Aus $x B y$ und $y B x$ folgt $x = y$.

Wegen $C = A \cup B$ sind alle Elemente aus A oder B auch Elemente von C und es gilt:
Für alle $x, y \in M$ gilt: Aus $x C y$ und $y C x$ folgt $x = y$.

Also ist auch C antisymmetrisch. **qed.**

Gegenbeispiel

Der Satz 2x.1

Seien A und B zweistellige, antisymmetrische Relationen über der Menge M. Dann ist $C = A \cup B$ auch eine antisymmetrische Relation.

ist nicht korrekt. Man kann ihn durch ein **Gegenbeispiel widerlegen**:

z.B. A = {(a, a), (b, c)}, B = {(d, d), (c, b)}, C = {(a, a), (b, c), (d, d), (c, b)}

Der „Beweis" von Satz 2x.1 ist fehlerhaft.

Beispiel 2

Satz 2x.2:

Seien A und B zweistellige, symmetrische Relationen über der Menge M. Dann ist $C = A \cup B$ auch eine symmetrische Relation.

Beweis:

Sind A und B leer, dann ist auch C leer und ist gemäß Definition symmetrisch.

Ist C nicht leer, dann sei x C y für beliebige x und y.

Wegen $C = A \cup B$ gilt x A y oder x B y.

Falls x A y gilt, dann ist auch y A x, weil A symmetrisch ist.
Wegen $C = A \cup B$ ist auch y C x.

Falls x B y gilt, dann ist auch y B x, weil B symmetrisch ist.
Wegen $C = A \cup B$ ist auch y C x.

Also folgt aus x C y auch y C x. Deshalb ist auch C symmetrisch.

qed.

Eigenschaften von Beweisen

Beweise können

- korrekt oder fehlerhaft,
- verständlich oder unverständlich,
- elegant oder umständlich,
- wohl-strukturiert oder verschlungen

sein.

Zur Konstruktion von Beweisen gibt es

- **Regeln, Methoden, Strukturen, Strategien.**

Dazu wird in diesem Abschnitt eingeführt.
Erst Kapitel 4 liefert die notwendigen Grundlagen der Logik.
Das Buch [D. J. Velleman: How to prove it] enthält umfassendes Material zu diesem Thema.

Manche Beweise benötigen außerdem eine gute Beweisidee.

Form von Satz und Beweis

Ein **Satz (Theorem)** besteht aus
Voraussetzungen (Prämissen) und einer **Behauptung (Konklusion)**.

Voraussetzungen und Behauptung sind Aussagen.
Wenn alle Voraussetzungen wahr sind, dann muss auch die Behauptung wahr sein.

Satz 2x.2:
Seien A und B zweistellige, symmetrische Relationen über der Menge M.
Dann ist $C = A \cup B$ auch eine symmetrische Relation.

Der **Beweis** eines Satzes muss nachweisen, dass die Behauptung wahr ist und kann dabei verwenden

- die Voraussetzungen,
- Definitionen oder bekannte Tatsachen,
- im Beweis selbst oder anderweitig als wahr bewiesene Aussagen,
- Schlussregeln.

Beweisstruktur Fallunterscheidung

Beweise können in **Fallunterscheidungen** gegliedert sein. Typische Gründe dafür:

- **Sonderfall** abspalten (z.B. leer, nicht leer)
- ***oder* in der Voraussetzung** (z.B. $(x, y) \in C = A \cup B$ bedeutet $(x, y) \in A$ ***oder*** $(x, y) \in B$)
- ***und* in der Behauptung** (Beispiel später)

Beweis 2x.2:

leer — Sind A und B leer, dann ist auch C leer und ist gemäß Definition symmetrisch.

nicht leer — Ist C nicht leer, dann sei x C y für beliebige x und y.

Wegen $C = A \cup B$ gilt x A y oder x B y.

$(x, y) \in A$ — Falls x A y gilt, dann ist auch y A x, weil A symmetrisch ist. Wegen $C = A \cup B$ ist auch y C x.

$(x, y) \in B$ — Falls x B y gilt, dann ist auch y B x, weil B symmetrisch ist. Wegen $C = A \cup B$ ist auch y C x.

Also folgt aus x C y auch y C x.

Deshalb ist auch C symmetrisch. **qed.**

Implikation als Behauptung

Satz 2x.3:
Sei R eine zweistellige Relation über der Menge M.
Wenn **a R b und b R a mit a $\neq$ b**, dann ist R **weder eine Halbordnung (HO)**, **noch eine strenge Halbordnung (sHO)**, **noch eine totale Ordnung (tO)**.

Die **Behauptung des Satzes** hat die Form

P **impliziert** (Q1 und Q2 und Q3)
(a R b und b R a mit a $\neq$b) **impliziert** (**nicht** HO **und nicht** sHO **und nicht** tO)

Hier kann man zwei **Techniken zur Gliederung des Beweises** anwenden:

- **Behauptung P impliziert Q: füge P zu den Voraussetzungen und beweise Q.**
- **Behauptung Q_1 und Q_2 und ...: beweise jedes Q_i in einem einzelnen Fall.**

Damit bekommt der Beweis 2x.3 folgende Struktur:

Beweis 2x.3:
Wir nehmen an, es gelte P = (a R b und b R a mit a $\neq$b)
Beweis aus Voraussetzung und P folgt nicht HO
Beweis aus Voraussetzung und P folgt nicht sHO
Beweis aus Voraussetzung und P folgt nicht tO
also aus P folgt (nicht HO und nicht sHO und nicht tO)

Beweisstruktur ausfüllen

Beweis 2x.3:
Wir nehmen an, es gelte **a R b und b R a mit a ≠ b** für die zweistellige Relation R über der Menge M.

1. Dann verletzen a R b und b R a die Definition für Antisymmetrie. Also ist R **nicht eine Halbordnung**.
2. Da R gemäß (1) nicht antisymmetrisch ist, ist R auch **nicht eine totale Ordnung**.
3. Gemäß Satz 2x.4 (Mod-2.61) ist **R nicht eine strenge Halbordnung**.

Also folgt aus **a R b und b R a mit a ≠ b,** dass R **weder eine Halbordnung**, **noch eine strenge Halbordnung**, **noch eine totale Ordnung** ist. **qed.**

Konstruktionshilfen am Beispiel für Beweis 2x.3

gültige Aussagen:

$R \in Pow\ (M \times M)$

Behauptungen:

$a\ R\ b \wedge b\ R\ a \wedge a \neq b$
$\rightarrow (\neg\ HO \wedge \neg\ sHO \wedge \neg\ tO)$

Beweisstruktur:

Konstruktionshilfen am Beispiel für Beweis 2x.3

gültige Aussagen:

$R \in Pow(M \times M)$

$a\,R\,b \wedge b\,R\,a \wedge a \neq b$ (wg. Implik. in Beh.)

Behauptungen:

$\cancel{a\,R\,b \wedge b\,R\,a \wedge a \neq b \rightarrow (\neg HO \wedge \neg sHO \wedge \neg tO)}$

$\neg HO \wedge \neg sHO \wedge \neg tO$

Beweisstruktur:

Wir nehmen an, es gelte $Z = (a\,R\,b \wedge b\,R\,a \wedge a \neq b)$

Beweis aus Voraussetzung und Z folgt $\neg HO \wedge \neg sHO \wedge \neg tO$

also aus Z folgt (nicht HO und nicht sHO und nicht tO)

Konstruktionshilfen am Beispiel für Beweis 2x.3

gültige Aussagen:

$R \in \mathrm{Pow}\,(M \times M)$

$a\ R\ b \wedge b\ R\ a \wedge a \neq b$ (wg. Implik. in Beh.)

Behauptungen:

$\cancel{a\ R\ b \wedge b\ R\ a \wedge a \neq b \rightarrow (\neg HO \wedge \neg sHO \wedge \neg tO)}$

$\cancel{\neg HO \wedge \neg sHO \wedge \neg tO}$

$\neg$ HO (3 Fälle wg. Konjunktion)

$\neg$ sHO

$\neg$ tO

Beweisstruktur:

Wir nehmen an, es gelte $Z = (a\ R\ b \wedge b\ R\ a \wedge a \neq b)$

~~Beweis aus Voraussetzung und Z folgt $\neg HO \wedge \neg sHO \wedge \neg tO$~~

Beweis aus Voraussetzung und Z folgt nicht HO

Beweis aus Voraussetzung und Z folgt nicht sHO

Beweis aus Voraussetzung und Z folgt nicht tO

also aus Z folgt (nicht HO und nicht sHO und nicht tO)

Konstruktionshilfen am Beispiel für Beweis 2x.3

gültige Aussagen:

$R \in Pow(M \times M)$

$a\,R\,b \wedge b\,R\,a \wedge a \neq b$ (wg. Implik. in Beh.)

R nicht antisymmetrisch (wg. Def. antisy.)

Behauptungen:

$\cancel{a\,R\,b \wedge b\,R\,a \wedge a \neq b \rightarrow (\neg HO \wedge \neg sHO \wedge \neg tO)}$

$\cancel{\neg HO \wedge \neg sHO \wedge \neg tO}$

$\neg$ HO (3 Fälle wg. Konjunktion)

$\neg$ sHO

$\neg$ tO

Beweisstruktur:

Wir nehmen an, es gelte $Z = (a\,R\,b \wedge b\,R\,a \wedge a \neq b)$

~~Beweis aus Voraussetzung und Z folgt~~ $\cancel{\neg HO \wedge \neg sHO \wedge \neg tO}$

Beweis aus Voraussetzung und Z folgt nicht HO

Beweis aus Voraussetzung und Z folgt nicht sHO

Beweis aus Voraussetzung und Z folgt nicht tO

also aus Z folgt (nicht HO und nicht sHO und nicht tO)

Konstruktionshilfen am Beispiel für Beweis 2x.3

gültige Aussagen:

$R \in \text{Pow}(M \times M)$

$a\ R\ b \wedge b\ R\ a \wedge a \neq b$ (wg. Implik. in Beh.)

R nicht antisymmetrisch (wg. Def. antisy.)

R ist nicht Halbordnung (wg. Def. HO)

Behauptungen:

~~$a\ R\ b \wedge b\ R\ a \wedge a \neq b \rightarrow (\neg HO \wedge \neg sHO \wedge \neg tO)$~~

~~$\neg HO \wedge \neg sHO \wedge \neg tO$~~

~~$\neg HO$ (3 Fälle wg. Konjunktion)~~

$\neg sHO$

$\neg tO$

Beweisstruktur:

Wir nehmen an, es gelte $Z = (a\ R\ b \wedge b\ R\ a \wedge a \neq b)$

~~Beweis aus Voraussetzung und Z folgt $\neg HO \wedge \neg sHO \wedge \neg tO$~~

Beweis aus Voraussetzung und Z folgt nicht HO

Beweis aus Voraussetzung und Z folgt nicht sHO

Beweis aus Voraussetzung und Z folgt nicht tO

also aus Z folgt (nicht HO und nicht sHO und nicht tO)

Konstruktionshilfen am Beispiel für Beweis 2x.3

gültige Aussagen:

$R \in Pow(M \times M)$

$a R b \wedge b R a \wedge a \neq b$ (wg. Implik. in Beh.)

R nicht antisymmetrisch (wg. Def. antisy.)

R ist nicht Halbordnung (wg. Def. HO)

R ist nicht totale Ordnung (wg. Def. tO.)

Behauptungen:

~~$a R b \wedge b R a \wedge a \neq b \rightarrow (\neg HO \wedge \neg sHO \wedge \neg tO)$~~

~~$\neg HO \wedge \neg sHO \wedge \neg tO$~~

~~$\neg HO$ (3 Fälle wg. Konjunktion)~~

$\neg sHO$

~~$\neg tO$~~

Beweisstruktur:

Wir nehmen an, es gelte $Z = (a R b \wedge b R a \wedge a \neq b)$

~~Beweis aus Voraussetzung und Z folgt $\neg HO \wedge \neg sHO \wedge \neg tO$~~

Beweis aus Voraussetzung und Z folgt nicht HO

Beweis aus Voraussetzung und Z folgt nicht sHO

Beweis aus Voraussetzung und Z folgt nicht tO

also aus Z folgt (nicht HO und nicht sHO und nicht tO)

Konstruktionshilfen am Beispiel für Beweis 2x.3

gültige Aussagen:

$R \in Pow(M \times M)$

$a\,R\,b \wedge b\,R\,a \wedge a \neq b$ (wg. Implik. in Beh.)

R nicht antisymmetrisch (wg. Def. antisy.)

R ist nicht Halbordnung (wg. Def. HO)

R ist nicht totale Ordnung (wg. Def. tO.)

nicht sHO wird separat bewiesen (2x.4)

Behauptungen:

~~$a\,R\,b \wedge b\,R\,a \wedge a \neq b \rightarrow (\neg HO \wedge \neg sHO \wedge \neg tO)$~~

~~$\neg HO \wedge \neg sHO \wedge \neg tO$~~

~~$\neg HO$ (3 Fälle wg. Konjunktion)~~

~~$\neg sHO$~~

~~$\neg tO$~~

Beweisstruktur:

Wir nehmen an, es gelte $Z = (a\,R\,b \wedge b\,R\,a \wedge a \neq b)$

~~Beweis aus Voraussetzung und Z folgt $\neg HO \wedge \neg sHO \wedge \neg tO$~~

Beweis aus Voraussetzung und Z folgt nicht HO

Beweis aus Voraussetzung und Z folgt nicht sHO

Beweis aus Voraussetzung und Z folgt nicht tO

also aus Z folgt (nicht HO und nicht sHO und nicht tO)

Konstruktionshilfen am Beispiel für Beweis 2x.3

gültige Aussagen:

$R \in Pow(M \times M)$

$a\,R\,b \wedge b\,R\,a \wedge a \neq b$ (wg. Implik. in Beh.)

R nicht antisymmetrisch (wg. Def. antisy.)

R ist nicht Halbordnung (wg. Def. HO)

R ist nicht totale Ordnung (wg. Def. tO.)

nicht sHO wird separat bewiesen (2x.4)

Behauptungen:

$\cancel{a\,R\,b \wedge b\,R\,a \wedge a \neq b \rightarrow (\neg HO \wedge \neg sHO \wedge \neg tO)}$

$\cancel{\neg HO \wedge \neg sHO \wedge \neg tO}$

~~¬ HO~~ (3 Fälle wg. Konjunktion)

$\cancel{\neg sHO}$

$\cancel{\neg tO}$

Beweisstruktur:

Wir nehmen an, es gelte $Z = (a\,R\,b \wedge b\,R\,a \wedge a \neq b)$

~~Beweis aus Voraussetzung und Z folgt ¬ HO ∧ ¬ sHO ∧ ¬ tO~~

Beweis aus Voraussetzung und Z folgt nicht HO

Beweis aus Voraussetzung und Z folgt nicht sHO

Beweis aus Voraussetzung und Z folgt nicht tO

also aus Z folgt (nicht HO und nicht sHO und nicht tO)

abschließend Beweistext zusammensetzen

Methode: Beweis durch Widerspruch

Ein Beweis durch Widerspruch führt häufig zum Ziel, wenn die Behauptung eine Negation ist:

Satz: Voraussetzung **V**. Behauptung **nicht P**.

Man nimmt dann die **nicht-negierte Behauptung mit als Voraussetzung** auf und leitet mit Schlussregeln daraus einen Widerspruch her, d.h. eine Aussage, die immer falsch ist, z. B. ($x \in M$ und $x \notin M$).

Beweis: Aus **V** und **P** folgt ein **Widerspruch**. Also war die Annahme **P** falsch.
Also gilt **nicht P**. **qed.**

Häufig ist **nicht P** ein geeignetes Ziel für den Widerspruchsbeweis:

Beweis: Aus **V** und **P** folgt **nicht P**. Also gilt **(P und nicht P)**.
Also war die Annahme **P** falsch, also gilt **nicht P**. **qed.**

Beispiel für Beweis durch Widerspruch

Satz 2x.4:

Sei R eine zweistellige Relationen über der Menge M.
Wenn **a R b und b R a mit a $\neq$ b**, dann ist **R nicht eine strenge Halbordnung**.

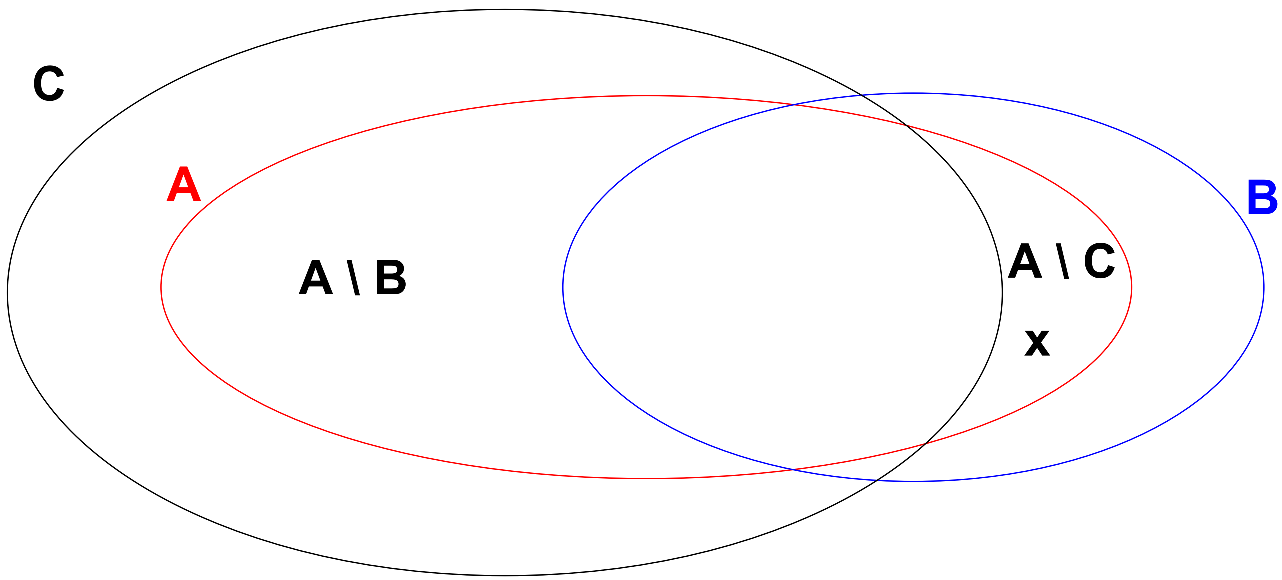
Beweis durch Widerspruch:

Sei **a R b und b R a mit a $\neq$ b**.
Wir nehmen an, dass **R eine strenge Halbordnung** ist.
Dann muss R irreflexiv und transitiv sein.
Wegen der Transitivität folgt aus a R b und b R a auch **a R a und b R b**.
a R a verletzt jedoch die Definition von **Irreflexivität**.
Also ist die Annahme, dass R eine **strenge Halbordnung ist, falsch**.
Also ist **R nicht eine strenge Halbordnung**. **qed.**

Satz 2x.5 zur Konstruktion eines Widerspruchsbeweises

Satz 2x.5:

A, B, C seien Mengen mit $A \setminus B \subseteq C$. **Dann gilt:**
Aus $x \in A \setminus C$ folgt $x \in B$.



Konstruktion eines Widerspruchsbeweises 2x.5

gültige Aussagen:

A, B, C Mengen

$A \setminus B \subseteq C$

Behauptungen:

$x \in A \setminus C \rightarrow x \in B$

Beweisstruktur:

Für die Mengen A, B, C gilt $A \setminus B \subseteq C$.

Konstruktion eines Widerspruchsbeweises 2x.5

gültige Aussagen:

A, B, C Mengen

$A \setminus B \subseteq C$

(es gibt ein $x \in A \setminus C$)

Behauptungen:

$x \in A \setminus C \rightarrow x \in B$ Implikation

$x \in B$

Beweisstruktur:

Für die Mengen A, B, C gilt $A \setminus B \subseteq C$.

Es gibt ein $x \in A \setminus C$.

Beweise $x \in B$.

Konstruktion eines Widerspruchsbeweises 2x.5

gültige Aussagen:

A, B, C Mengen

$A \setminus B \subseteq C$

(es gibt ein $x \in A \setminus C$)

$x \notin B$

Behauptungen:

$x \in A \setminus C \rightarrow x \in B$ Implikation

$x \in B$ zeige Widerspruch welchen?

Beweisstruktur:

Für die Mengen A, B, C gilt $A \setminus B \subseteq C$.

Es gibt ein $x \in A \setminus C$.

Beweise $x \in B$.

Wir nehmen an $x \notin B$ und zeigen einen Widerspruch:

Konstruktion eines Widerspruchsbeweises 2x.5

gültige Aussagen:

A, B, C Mengen

$A \setminus B \subseteq C$

(es gibt ein $x \in A \setminus C$)

$x \notin B$

$x \in A$

$x \notin C$

Def. \

Behauptungen:

$x \in A \setminus C \rightarrow x \in B$ Implikation

$x \in B$ zeige Widerspruch welchen?

Beweisstruktur:

Für die Mengen A, B, C gilt $A \setminus B \subseteq C$.

Es gibt ein $x \in A \setminus C$.

Beweise $x \in B$.

Wir nehmen an $x \notin B$ und zeigen einen Widerspruch:

Wegen $x \in A \setminus C$ gilt $x \in A$ und $x \notin C$.

Konstruktion eines Widerspruchsbeweises 2x.5

gültige Aussagen:

A, B, C Mengen

$A \setminus B \subseteq C$

(es gibt ein $x \in A \setminus C$)

Def. \

$x \notin B$

$x \in A$

$x \notin C$

$x \in C$ Widerspruch!

Behauptungen:

$x \in A \setminus C \rightarrow x \in B$ Implikation

$x \in B$ zeige Widerspruch welchen?

Beweisstruktur:

Für die Mengen A, B, C gilt $A \setminus B \subseteq C$.

Es gibt ein $x \in A \setminus C$.

Beweise $x \in B$.

Wir nehmen an $x \notin B$ und zeigen einen Widerspruch:

Wegen $x \in A \setminus C$ gilt $x \in A$ und $x \notin C$.

Wegen $A \setminus B \subseteq C$ und $x \notin B$ und $x \in A$ gilt $x \in C$.

Das ist ein Widerspruch.

Konstruktion eines Widerspruchsbeweises 2x.5

gültige Aussagen:

A, B, C Mengen

$A \setminus B \subseteq C$

(es gibt ein $x \in A \setminus C$)

$x \notin B$

$x \in A$

$x \notin C$

$x \in C$ Widerspruch!

Def. \

Behauptungen:

$x \in A \setminus C \rightarrow x \in B$ Implikation

$x \in B$ zeige Widerspruch welchen?

Beweisstruktur:

Für die Mengen A, B, C gilt $A \setminus B \subseteq C$.

Es gibt ein $x \in A \setminus C$.

Beweise $x \in B$.

Wir nehmen an $x \notin B$ und zeigen einen Widerspruch:

Wegen $x \in A \setminus C$ gilt $x \in A$ und $x \notin C$.

Wegen $A \setminus B \subseteq C$ und $x \notin B$ und $x \in A$ gilt $x \in C$.

Das ist ein Widerspruch.

Also ist die Annahme $x \notin B$ falsch; es gilt $x \in B$.

Also, für Mengen A, B, C mit $A \setminus B \subseteq C$ gilt: Aus $x \in A \setminus C$ folgt $x \in B$. **q.e.d.**

Unendlich viele Primzahlen

Satz 2x.6: Es gibt **unendlich viele Primzahlen**.

Beweis durch Widerspruch (nach Euclid) 2x.6:
Wir nehmen an, dass es **endlich viele Primzahlen** gibt, nämlich $\mathbf{p_1, p_2, ..., p_n}$.
Sei $\mathbf{m = p_1 p_2 ... p_n + 1}$.
m ist nicht durch p_1 teilbar, denn m dividiert durch p_1 ergibt $p_2...p_n$ mit Rest 1. Aus demselben Grund ist m nicht durch $p_2, ..., p_n$ teilbar.
Wir verwenden nun die Tatsache, dass jede natürliche Zahl, die größer als 1 ist, entweder **eine Primzahl** ist oder als **Produkt von Primzahlen** geschrieben werden kann. m ist größer als 1, also ist m entweder eine Primzahl oder m ist ein Produkt von Primzahlen.

Nehmen wir an, **m ist eine Primzahl**. m ist größer als jede Zahl $p_1, p_2, ..., p_n$. Also haben wir eine weitere Primzahl gefunden. Das **widerspricht** der Annahme, dass $p_1, p_2, ..., p_n$ **alle** Primzahlen sind.

Nehmen wir nun an, dass **m ein Produkt von Primzahlen** ist. Sei q eine dieser Primzahlen. Dann ist q ein Teiler von m. Da $p_1, p_2, ..., p_n$ nicht Teiler von m sind, haben wir eine weitere Primzahl gefunden. Das ist wie oben ein **Widerspruch**.

Die Annahme, dass es endlich viele Primzahlen gibt, hat zum **Widerspruch** geführt. Also gibt es unendlich viele Primzahlen. **qed.**

Methode: Beweis durch Induktion

Beweise durch Induktion sind geeignet für Aussagen der Form

Für alle n $\in \mathbb{N}_0$ **gilt P (n)** .

Ein Beweis durch Induktion hat folgende Struktur:

Induktionsanfang:Beweis von **P (0)** .

Induktionsschritt:Sei n $\in \mathbb{N}_0$ beliebig aber fest.
Beweis von **Aus P (n) folgt P (n+1)**. **qed.**

Manchmal reicht im Beweis des Induktionsschrittes P (n) als Vorbedingung nicht aus.
Dann kann man in der folgenden Variante P (0), P (1), ..., P (n) verwenden:

Variante des Induktionsbeweises:

Induktionsanfang: Beweis von **P (0)** .

Induktionsschritt: Sei n $\in \mathbb{N}_0$ beliebig aber fest.
Beweis von **Aus [P (0), P (1), ..., P (n)] folgt P (n+1)**. **qed.**

Zum Beweis von Aussagen der Form **Für alle n** $\in \mathbb{N}_0$ **, n** $\geq$ **k gilt P (n)** beginnt man im Induktionsanfang mit **P (k) statt P (0)**.

Statt *Beweis durch Induktion* sagt man auch *Beweis durch vollständige Induktion*.

Beispiel für Beweis durch Induktion

Satz 2x.7:

Für alle n $\in \mathbb{N}_0$ **gilt** $\mathbf{2^0 + 2^1 + ... + 2^n = 2^{n+1} - 1}$.

Beweis durch Induktion:

Induktionsanfang:

Für $n = 0$ gilt $2^0 = 1 = 2^1 - 1$.

Induktionsschritt:

Sei $n \in \mathbb{N}_0$ beliebig aber fest und

sei $\mathbf{2^0 + 2^1 + ... + 2^n = 2^{n+1} - 1}$. Dann ist

$$2^0 + 2^1 + ... + 2^n + 2^{n+1} = (\mathbf{2^0 + 2^1 + ... + 2^n}) + 2^{n+1}$$

$$= (2^{n+1} - 1) + 2^{n+1}$$

$$= 2 * 2^{n+1} - 1$$

$$= \mathbf{2^{n+2} - 1}$$

qed.

Zusammenfassung

Satzform: Voraussetzungen V. Behauptung B.

Beweismethoden:

Direkter Beweis:
Aus **V** und bewiesenen Tatsachen mit Schlussregeln **B** nachweisen.

Widerspruchsbeweis:
Nicht **B** annehmen. Aus **V** *und nicht* **B** einen Widerspruch ableiten. Also gilt **B**.

Induktionsbeweis von Behauptung B = **Für alle n** $\in \mathbb{N}_0$ **gilt P (n):**
Induktionsanfang: Beweis von P (0),
Induktionsschritt: Beweis von Aus P (n) folgt P (n+1)

Techniken:

Fallunterscheidung bei **Sonderfällen**, V_1 ***oder*** V_2, B_1 ***und*** B_2

Wenn B = P ***impliziert*** Q, dann aus V *und* P die Behauptung Q folgern.

Viele weitere Strategien, Techniken und Beispiele im Buch von Velleman, z.B.

Wenn B = P ***impliziert*** Q, dann aus V *und nicht* Q die Behauptung *nicht* P folgern.