2 Modellierung mit Wertebereichen

In der Modellierung von Systemen, Aufgaben, Lösungen kommen
Objekte unterschiedlicher Art und Zusammensetzung vor.

Für Teile des Modells wird angegeben, **aus welchem Wertebereich sie stammen**,
aber noch offen gelassen, welchen Wert sie haben.
Beispiel: Gegeben 3 Karten aus einem Kartenspiel; welche ist die höchste?

Die Beschreibung des Modells wird präzisiert durch **Angabe der Wertebereiche**,
aus denen die Objekte, Konstanten, Werte von Variablen, Eingaben, Ausgaben,
Lösungen, usw. stammen.

Wertebereich: eine **Menge gleichartiger Werte**
Wertebereiche werden aus Mengen und Strukturen darüber gebildet.

Beispiel: Modellierung von Kartenspielen

Wertebereich	**einige Elemente daraus**
KartenSymbole := {7, 8, 9, 10, Bube, Dame, König, Ass}	8 Dame
KartenArten := {Kreuz, Pik, Herz, Karo}	Pik
Karten := KartenArten $\times$ KartenSymbole Menge aller Paare aus KartenArten und KartenSymbole	(Kreuz, 8) (Herz, Dame)

Übersicht über Begriffe

Wertebereich: eine **Menge gleichartiger Werte**

Grundlegender Kalkül: **Mengenlehre** (halbformal);
Mengen und Mengenoperationen

Strukturen über Mengen zur Bildung **zusammengesetzter Wertebereiche**

- Potenzmengen
- kartesische Produkte, Tupel
- Folgen
- Relationen
- Funktionen
- disjunkte Vereinigungen

Verwendung des Kalküls:

Modellierung von Strukturen und Zusammenhängen

Grundlage für alle anderen formalen Kalküle

abstrakte Grundlage für Typen in Programmiersprachen

Einführendes Beispiel

Internationale Arbeitsgruppen

Bei der UNO sollen Arbeitsgruppen aus Delegierten der drei Nationen A, B und C gebildet werden. Jede Nation hat vier Delegierte. Jede Gruppe besteht aus drei Personen, eine aus jeder Nation. Die Sprachen der drei Nationen sind verschieden; wir nennen sie auch A, B, C. Die Mitglieder jeder Arbeitsgruppe sollen eine gemeinsame Sprache sprechen.

aus [T. Scheurer S. 155]

Internationale Arbeitsgruppen

Bei der UNO sollen Arbeitsgruppen aus Delegierten der drei Nationen A, B und C gebildet werden. Jede Nation hat vier Delegierte. Jede Gruppe besteht aus drei Personen, eine aus jeder Nation. Die Sprachen der drei Nationen sind verschieden; wir nennen sie auch A, B, C. Die Mitglieder jeder Arbeitsgruppe sollen eine gemeinsame Sprache sprechen.

aus [T. Scheurer S. 155]

Wertebereiche für das Beispiel

Beschreibung	**formale Angaben**
Menge der Nationen	Nationen := {A, B, C}
Indexmenge zur Unterscheidung der Delegierten	Ind := {1, 2, 3, 4}
ein Delegierter modelliert durch ein **Paar**	(a, i) mit a $\in$ Nationen, i $\in$ Ind
Wertebereich der Delegierten	Delegierte := Nationen $\times$ Ind
Wertebereich der Arbeitsgruppen	
3-Tupel, kartesischesProdukt	AGn := $\{(A, i) \mid i \in Ind\} \times \{(B, j) \mid j \in Ind\} \times \{(C, k) \mid k \in Ind\}$
Wertebereich für **Teilmengen** von Sprachen	SprachMengen := Pow (Nationen)
	Pow (M) ist die **Potenzmenge** von M
Eine **Funktion** Sp gibt an, welche Sprachen ein	
Delegierter spricht:	Sp $\in$ DSpricht
Wertebereich solcher Funktionen	DSpricht := Delegierte -> SprachMengen
Wertebereich der gemeinsamen Sprachen einer AG	
Wertebereich	AGSpricht := AGn -> SprachMengen
GemSp ist eine Funktion daraus	GemSp $\in$ AGSpricht

N := M bedeutet „**Der Name N ist definiert als M**“.

2.1 Mengen

Menge: Zusammenfassung von verschiedenen Objekten, den Elementen der Menge M.
a ist Element aus M wird notiert $a \in M$.

Definition von Mengen durch

- **Aufzählen der Elemente (extensional)**: $M := \{1, 4, 9, 16, 25\}$
- **Angabe einer Bedingung (intensional)**: $M := \{ a \mid a \in \mathbb{N}, \text{ a ist Quadratzahl und } a \leq 30\}$
  allgemein: $M := \{ a \mid P(a) \}$
  wobei P (a) eine Aussage über a ist, die wahr oder falsch sein kann.

Mengen können **endlich** (z. B. {1, 4, 9, 16, 25}) oder
nicht-endlich sein (z. B. $\{ a \mid a \in \mathbb{N}, \text{ a ist Quadratzahl} \}$)

Die **leere Menge** wird { } oder $\varnothing$ geschrieben.

Die **Anzahl der Elemente** einer Menge M heißt die **Kardinalität** von M,
geschrieben $|M|$ oder Card(M)

Eigenschaften von Mengen

Wichtige grundsätzliche Eigenschaften von Mengen:

- **Alle Elemente einer Menge sind verschieden.**
- **Die Elemente einer Menge sind nicht geordnet.**
- **Dieselbe Menge kann auf verschiedene Weisen notiert werden:**

$\{ 1, 2, 3, 4 \}$ $\{ i \mid i \in \mathbb{N}, 0 < i < 5 \}$ $\{ 1, 1, 2, 2, 3, 4 \}$ $\{ 2, 4, 1, 3 \}$

Mengen können aus **atomaren oder zusammengesetzten** Elementen gebildet werden,
z. B. nur atomare Elemente: { 1, 2, 3, 4 } { rot, gelb, blau } { Kreuz, Pik, Herz, Karo } { 1 }
Menge von Paaren: { (Pik, 10), (Herz, Dame) }
Menge von Mengen: { {rot, blau}, {blau}, ∅ } { ∅ }

Die **Existenz von atomaren Objekten** des jeweiligen Modellierungsbereiches wird vorausgesetzt, z. B. die natürlichen Zahlen, Arten und Werte von Spielkarten.

Eine Menge kann auch **verschiedenartige Elemente** enthalten,
z. B. {1, (Pik, 10), rot, 9}
aber **nicht bei der Modellierung mit Wertebereichen:** hier sollen alle Elemente eines Wertebereiches gleichartig sein.

Russels Paradoxon

Man muss prinzipiell entscheiden können, ob ein Wert a **Element einer Menge** M ist, „$a \in M$?“

Russels Paradoxon:

Sei P die Menge aller Mengen, die sich nicht selbst als Element enthalten,
also $P := \{ x \mid x \notin x\}$.

Dann führt die Frage „Ist P Element von P?“ zum **Widerspruch**.

Um solche Anomalien auszuschließen, geben wir in **intensionalen Mengendefinitionen** an, aus welchem größeren, **schon definierten Wertebereich** die Elemente stammen:

$$M := \{a \mid a \in \mathbb{N}, \text{ a ist Quadratzahl und } a \leq 30\}$$

hier also „$a \in \mathbb{N}$“.

Damit tatsächlich entschieden werden kann, **welche Elemente M enthält**, muss die Bedingung über a (hier „a ist Quadratzahl und $a \leq 30$“) **entscheidbar** sein.

Diese Einschränkungen schließen nicht aus, Mengen **rekursiv zu definieren**, z. B.

$$\text{Sonnensystem} := \{\text{Sonne}\} \cup \{ x \mid x \in \text{Himmelskörper, x umkreist y, } y \in \text{Sonnensystem} \}$$

Mengenoperationen

Teilmenge von	$M \subseteq N$	aus $a \in M$ folgt $a \in N$
echte Teilmenge von	$M \subset N$	$M \subseteq N$ und $M \neq N$
Vereinigung	$M \cup N$	$:= \{x \mid x \in M \text{ oder } x \in N\}$
Durchschnitt	$M \cap N$	$:= \{x \mid x \in M \text{ und } x \in N\}$
Differenz	$M \setminus N$	$:= \{x \mid x \in M \text{ und } x \notin N\}$

M und N sind **disjunkt** genau dann, wenn gilt $M \cap N = \emptyset$

2.2 Potenzmengen

Potenzmenge (powerset) einer Grundmenge U ist die **Menge aller Teilmengen** von U,
geschrieben Pow (U) oder $\wp$ (U).
Pow (U) := {M | M $\subseteq$ U}

Kardinalität: $|$ Pow (U) $| = 2^{\mathbf{n}}$ wenn $|U| = n$

Beispiele:

Grundmenge U_1 := {a, b} Potenzmenge Pow (U_1) = {∅, {a}, {b}, {a, b}}

Grundmenge U_2 := {1, 2, 3} Pow (U_2) = { ∅, {1}, {2}, {3}, {1,2}, {1,3}, {2,3}, {1,2,3} }

Wenn die **Werte Teilmengen von U** sind, ist ihr **Wertebereich die Potenzmenge von U**.

Modellierung mit Potenzmengen

Beispiel 2.1: Wertebereich der Sprachen, die ein Delegierter spricht
SprachMengen := Pow (Nationen), {A, B} $\in$ SprachMengen

Modellierungstechnik: Menge von Lösungen statt einer Lösung
Manche Aufgaben haben nicht immer genau eine Lösung, sondern je nach Daten mehrere oder keine Lösung. Dann kann man nach der Menge aller Lösungen fragen.
Der Wertebereich der Antwort ist die **Potenzmenge** des Wertebereiches der Lösungen.

Vergleiche auch **Mengentyp** in Pascal:

```
type Sprachen = set of {A, B, C};
var spricht: Sprachen;
spricht := {A, B};
```

2.3 Kartesische Produkte

Kartesisches Produkt der Mengen M und N:
Menge **aller geordneten Paare** mit erster Komponente aus M und zweiter Komponente aus N

$M \times N := \{z \mid z = (x, y) \text{ und } x \in M \text{ und } y \in N\}$

oder kürzer $M \times N := \{(x, y) \mid x \in M \text{ und } y \in N\}$

Enthält **alle Kombinationen** von Werten aus M und N.
Falls $M = \emptyset$ oder $N = \emptyset$, ist $M \times N = \emptyset$.

z. B. Delegierte := Nation $\times$ Ind = { (A, 1), (A, 2),..., (B, 1), (B, 2), ... }

Verallgemeinert zu **n-Tupeln** (n>1, geordnet):

$M_1 \times M_2 \times \ldots \times M_n := \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) \mid a_i \in M_i \text{ und } i \in I\}$ mit $I := \{1, \ldots, n\}$ und $n > 1$

z. B. Daten := Tage $\times$ Monate $\times$ Jahre, $(24, 10, 2011) \in$ Daten

Folgende Wertebereiche sind verschieden. Ihre Elemente haben **unterschiedliche Struktur**:

$(a, b, c) \in A \times B \times C$ $\quad$ $((a, b), c) \in (A \times B) \times C$

Notation bei **gleichen Mengen M_i** : $M \times M \times \ldots \times M = \mathbf{M^n}$ mit $n > 1$

Beispiel:

Wertebereich der Ergebnisse 3-maligen Würfelns: DreiWürfe := $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}^3$

Kardinalität: $| M_1 \times M_2 \times \ldots \times M_n | = \prod_{i \in I} |M_i|$ mit $I = \{1,\ldots, n\}$ mit $n > 1$

2.4 Disjunkte Vereinigung

Die allgemeine **disjunkte Vereinigung** fasst n Wertebereiche (Mengen) A_1, A_2, ...A_i, ..., A_n zu einem **vereinigten Wertebereich V** zusammen, wobei $i \in I := \{1, ..., n\}$.
Die Herkunft der Elemente aus A_i wird in den Paaren von V gekennzeichnet:

$$\mathbf{V := \{ (i, a_i) \mid a_i \in A_i \}}$$

Die erste Komponente der Paare ist eine **Kennzeichenkomponente** (engl. tag field).
Die A_i brauchen nicht paarweise disjunkt zu sein.

Kardinalität: $|V| = \sum_{i \in I} |A_i|$

Anwendungsmuster:

V ist ein allgemeinerer Wertebereich, er abstrahiert von den spezielleren A_i

Beispiele:

Geschäftspartner := { (Kunde, Siemens), (Kunde, Benteler), (Kunde, Unity), (Lieferant, Orga), (Lieferant, Siemens)} mit
Kunden := {Siemens, Benteler, Unity} Lieferanten := {Orga, Siemens}
Ind := {Kunde, Lieferant}

Buchstaben := {a, b, ..., z} Ziffern := {0, 1, ..., 9} Ind := {Buchstabe, Ziffer}

Zeichen = { (Buchstabe, b) | b ∈ Buchstaben} ∪ { (Ziffer, z) | z ∈ Ziffern}

2.5 Folgen

Endliche Folgen von Elementen aus A:

Sei	$\mathbf{A^0} := \{ \varepsilon \}$	die Menge, die **nur die leere Folge** über A, ε **bzw. (),** enthält,
	$\mathbf{A^1} := \{ (a) \mid a \in A\}$	die Menge **einelementiger Folgen** über A,
	$\mathbf{A^n}$ mit $n > 1$	die Menge der **n-Tupel** über A,

dann ist $\mathbf{A^+} := \{ x \mid x \in A^{\mathbf{i}} \text{ und } i \geq 1 \}$
die Menge der **nicht-leeren Folgen** beliebiger Länge über A

und $\mathbf{A^*} := A^+ \cup A^0$ die Menge von Folgen über A, die **auch die leere Folge** enthält.

Folgen notieren wir wie Tupel, d. h. $(a_1, ..., a_n) \in A^+$ für $n \geq 1$ und $a_i \in A$; $() \in A^*$

Beispiele:

$(1, 1, 2, 5, 5, 10, 20) \in \mathbb{N}^{\mathbf{+}}$
$(m, o, d, e, l, l) \in \text{Buchstaben}^{\mathbf{+}}$
neueAufträge := $\text{Auftrag}^{\mathbf{*}}$
gezogeneKarten := Karten*

2.6 Relationen

Relationen sind Teilmengen aus kartesischen Produkten.

n-stellige Relation: $R \subseteq M_1 \times M_2 \times \ldots \times M_n$ mit $n > 1$

R ist also eine Menge von n-Tupeln.

Wertebereich von R: $R \in Pow\,(M_1 \times M_2 \times \ldots \times M_n)$

Eine **1-stellige Relation** R über einer Menge M ist eine Teilmenge von M, also $R \in Pow\,(M)$.

Eine Relation R definiert eine **Aussage über Tupel**.
Wir sagen auch: „Eine Relation R gilt für die Tupel, die R enthält.“

Beispiele:

Relation $\leq\ \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ ein Element daraus: $(27, 42) \in\ \leq$ also gilt $27 \leq 42$

NationenKleiner := {(A, C), (C, B), (A, B)} $\subseteq$ Nationen^2

Menüs22-10 := {(Lauchsuppe, Putenbraten, Eisbecher),
(Lauchsuppe, Kalbsteak, Ananas), (Salat, Omelett, Ananas)}

Menüs22-10 $\subseteq$ Vorspeisen $\times$ Hauptgerichte $\times$ Desserts mit

Vorspeisen := {Lauchsuppe, Salat, ...};
Hauptgerichte := {Putenbraten, Kalbsteak, Omelett, ...}
Desserts := {Eisbecher, Ananas, Schokoladenpudding, ...}

Kardinalität, Schreibweisen

Der **Wertebereich Pow** $(\mathbf{M_1} \times \mathbf{M_2} \times \ldots \times \mathbf{M_n})$ hat die **Kardinalität**

$$|\mathbf{Pow}\ (\mathbf{M_1} \times \mathbf{M_2} \times \ldots \times \mathbf{M_n})| = 2^{\prod_{i \in I} |M_i|}$$, falls alle $\mathbf{M_i}$ endlich sind.

d.h. es gibt $2^{\prod_{i \in I} |M_i|}$ verschiedene Relationen in dem Wertebereich.

Intensionale Definition einer Relation:

GültigeDaten $\subseteq$ Daten = Tage $\times$ Monate $\times$ Jahre

GültigeDaten := { (t, m, j) | t, m, j $\in \mathbb{N}$, m$\leq$12,
(m$\in$ {1,3,5,7,8,10,12} $\wedge$ t $\leq$ 31) $\vee$
(m$\in$ {4,6,9,11} $\wedge$ t $\leq$ 30) $\vee$
(m = 2 $\wedge$ t $\leq$ 29 $\wedge$ Schaltjahr (j)) $\vee$
(m = 2 $\wedge$ t $\leq$ 28 $\wedge$ $\neg$ Schaltjahr (j))}

(24, 10, 2011), (29, 2, 2012) $\in$ GültigeDaten,   (31, 4, 2010) $\notin$ GültigeDaten

alternative Schreibweisen für Elemente aus Relationen:
R(a) für a $\in$ R,   z. B. GültigeDaten(24, 10, 2011)

bei 2-stelligen Relationen auch mit Operatoren:
x R y für (x, y) $\in$ R,   z. B. $x \leq y$, $a \neq b$, $p \rightarrow q$

Eigenschaften 2-stelliger Relationen

Für zweistellige Relationen $R \subseteq M \times M$ mit $M \neq \emptyset$ sind folgende Begriffe definiert:

- **reflexiv**, wenn für alle $x \in M$ gilt: $x\ R\ x$;
- **irreflexiv**, wenn für kein $x \in M$ gilt: $x\ R\ x$;
- **symmetrisch**, wenn für alle $x, y \in M$ gilt: aus $x\ R\ y$ folgt $y\ R\ x$;
- **antisymmetrisch**, wenn für alle $x, y \in M$ gilt: aus $x\ R\ y$ und $y\ R\ x$ folgt $x = y$;
- **asymmetrisch**, wenn für alle $x, y \in M$ gilt: aus $x\ R\ y$ folgt, $y\ R\ x$ gilt nicht;
- **transitiv**, wenn für alle $x, y, z \in M$ gilt: aus $x\ R\ y$ und $y\ R\ z$ folgt $x\ R\ z$;
- **total**, wenn für alle $x, y \in M$ gilt: $x\ R\ y$ oder $y\ R\ x$;

Hinweise zum Anwenden der Definitionen (genauer in Kap. 4.1, 4.2):

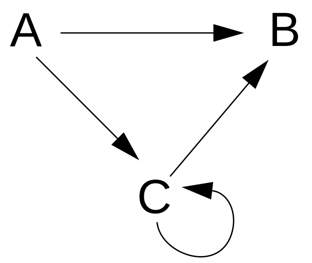
1. „**x R y**“ bedeutet „**(x, y)** $\in$ **R**“
2. **„**für alle $x \in M$ gilt ...“: der **gesamte Wertebereich M** muss geprüft werden
3. „für alle $x, y \in M$ gilt ...“: alle Paare von Werten aus M prüfen, auch solche mit $x = y$
4. „A **oder** B“ ist wahr, wenn **mindestens eins von beiden wahr** ist
5. „**aus A folgt B**“ ist gleichwertig zu „**(nicht A) oder B**“.

Beispiele für Eigenschaften 2-stelliger Relationen

Eigenschaft ist	sei M = { A, B, C } z.B. erfüllt von R = ...	z.B. nicht erfüllt von R = ...
reflexiv	{(A,A), (B,B), (C,C), (A,B)}	{(A,A), (B,C)}
irreflexiv	{(A,B)}	{(A,A)}
symmetrisch	{(A,B), (B,A), (C,C)}	{(A,B)}
antisymmetrisch	{(A,B), (C,C)}	{(A,B), (B,A)}
asymmetrisch	{(A,B), (C,A)}	{(A,B), (B,A)} oder {(C,C)}
transitiv	{(A,B), (B,C), (A,C)}	{(A,B), (B,C)}
total	{(A,A), (B,B), (C,C), (A,B), (B,C), (A,C), (C,B)}	{(A,A), (A,B), (A,C)}

{(A,B), (A,C), (C,B), (C,C)}

als gerichteter Graph:
(siehe Kap. 5)



Ordnungsrelationen

Eine zweistellige Relationen $R \subseteq M \times M$ ist eine

- **partielle Ordnung** oder **Halbordnung**, wenn R reflexiv, antisymmetrisch und transitiv ist;
- **strenge Ordnung** oder **strenge Halbordnung**, wenn R irreflexiv und transitiv ist;
- **Quasiordnung**, wenn R reflexiv und transitiv ist;
- **totale** oder **lineare Ordnung**, wenn R eine totale Halbordnung ist,
  also total, (reflexiv,) antisymmetrisch und transitiv;
- **Äquivalenzrelation**, wenn R reflexiv, symmetrisch und transitiv ist.

Aussagen zu diesen Definitionen

1. Alle solche Ordnungsrelationen sind transitiv.
2. Ist R eine totale Ordnung, dann ist R auch eine Halbordnung und eine Quasiordnung.
3. Nur für totale Ordnungen wird gefordert, dass alle Elemente aus M „vergleichbar“ sind (total).
4. Enthält R „Zyklen über verschiedene Elemente“, z.B. $(a, b), (b, a) \in R$ mit $a \neq b$,
   dann ist R weder eine Halbordnung, strenge Halbordnung, noch eine totale Ordnung.

Beispiele für Ordnungsrelationen

sei M = {A, B, C},
eq_M := {(A,B), (B,A), (A,A), (B,B), (C,C)}
$<_M$:= {(A,B), (B,C), (A,C)},
$\leq_M$:= {(A,B), (B,C), (A,C), (A,A), (B,B), (C,C)}

$\leq \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, $< \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$

	$<_M$	$\leq_M$	eq_M	$<$	$\leq$
reflexiv	**-**	**+**	**+**	**-**	**+**
irreflexiv	**+**	**-**	**-**	**+**	**-**
symmetrisch	**-**	**-**	**+**	**-**	**-**
antisymmetrisch	**+**	**+**	**-**	**+**	**+**
asymmetrisch	**+**	**-**	**-**	**+**	**-**
transitiv	**+**	**+**	**+**	**+**	**+**
total	**-**	**+**	**-**	**-**	**+**
	strenge Ordnung	**totale**	**Äquivalenz**	**strenge**	**totale**

2.7 Funktionen

Eine **Funktion f ist eine 2-stellige Relation f $\subseteq$ D $\times$ B** mit folgender Eigenschaft:
Aus (x, y) ∈ f und (x, z) ∈ f folgt y = z, d. h. zu einem x ∈ D gibt es höchstens ein Bild y.

D ist der **Definitionsbereich** von f; B ist der **Bildbereich** von f
D und B können beliebige, auch zusammengesetzte Wertebereiche sein.

Der **Wertebereich D -> B** ist die **Menge aller Funktionen, die von D auf B abbilden**.
Es gilt **D -> B $\subseteq$ Pow (D $\times$ B).**
D -> B enthält als Elemente alle Mengen von Paaren über **D $\times$ B**, die Funktionen sind.

Statt **f** ∈ **D -> B** sagt man auch **f hat die Signatur D -> B** oder kurz **f: D -> B**

Schreibweisen für (x, y) ∈ f auch y = f (x) oder f (x) = y oder x f y

Die Menge aller Paare (x, y) ∈ f heißt **Graph von f.**

Eine Funktion f ∈ D -> B heißt
n-stellig, wenn der Definitionsbereich D ein Wertebereich von n-Tupeln ist, n > 1;
1-stellig, wenn D nicht als kartesisches Produkt strukturiert ist und nicht leer ist.

Man spricht auch von **0-stelligen Funktionen**, wenn D der **leere Wertebereich** ist;
0-stellige Funktionen sind **konstante Funktionen** für jeweils einen **festen Wert b = f()**;
man kann sie allerdings nicht als Menge von Paaren angeben.

Beispiele für Funktionen

Funktion	**aus dem Wertebereich**
not := {(w, f), (f, w)}	Bool -> Bool
id := {(w,w), (f, f)}	Bool -> Bool
oder := {((w,w),w), ((w,f),w), ((f,w),w), ((f,f),f)}	Bool $\times$ Bool -> Bool
Quadrat := {(a, b) | a, b $\in \mathbb{N}$ und b = a*a}	$\mathbb{N}$ -> $\mathbb{N}$
ggt := {((a,b),c) | a, b, c $\in \mathbb{N}$ und c ist größter gemeinsamer Teiler von a und b}	$\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ -> $\mathbb{N}$
Sp := {((A, 1), {A,B}), ((B, 2), {B})}	Delegierte -> SprachMengen

Eigenschaften von Funktionen

Eine Funktion **f : D -> B** heißt

- **total**, wenn es für jedes $x \in D$ ein Paar $(x, y) \in f$ gibt,
- **partiell**, wenn nicht verlangt wird, dass f für alle $x \in D$ definiert ist,
- **surjektiv**, wenn es zu jedem $y \in B$ ein Paar $(x, y) \in f$ gibt,
- **injektiv**, wenn es zu jedem $y \in B$ höchstens ein Paar $(x, y) \in f$ gibt,
- **bijektiv**, wenn f surjektiv und injektiv ist.

Kardinalität des Wertebereiches, aus dem Funktionen stammen $| D \text{->} B | = (| B |+1)^{|D|}$

Anzahl der totalen Funktionen in $| D \text{->} B |$ ist $| B |^{|D|}$

... falls D und B endlich sind.

Anzahl der Möglichkeiten für unterschiedliche Funktionen mit dieser Signatur
z. B. $|\{A, B, C\} \text{->} \{w, f\}| = 3^3 = 27$ insgesamt; $2^3 = 8$ totale Funktionen in $|\{A, B, C\} \text{->} \{w, f\}|$

Spezielle Funktionen

Identitätsfunktion

$\mathbf{id_M}$: M -> M mit id_M := { (x, x) | x $\in$ M }

Charakteristische Funktion χ_M einer Menge M $\subseteq$ U, mit der Trägermenge U

gibt für jedes Element der Trägermenge U an, ob es in M enthalten ist:

χ_M : U -> Bool mit χ_M := { (x, b) | x $\in$ U und b = (x$\in$M)}

χ_M ist eine totale Funktion

Funktionen mit dem Bildbereich Bool heißen **Prädikate**.

z. B. <= : $(\mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0)$ -> Bool

Funktionen zur Modellierung von mehrfachen Vorkommen

In sogenannte **Multimengen (engl. bags)** können einige Werte mehrfach vorkommen. Es ist relevant, wieoft jeder Wert vorkommt.

Das **mehrfache Vorkommen** von Werten in einer Multimenge modellieren wir mit einer Funktion:

b: V -> $\mathbb{N}_0$ gibt für jeden Wert aus V an, wie oft er vorkommt, z. B.

geldBeutel $\in$ EUMünzen -> $\mathbb{N}_0$ mit

geldBeutel := {(1,3), (2, 0), (5,0), (10, 2), (20, 4), (50, 1), (100, 3), (200, 2)}

Funktionen auf Indexmengen

Indexmengen dienen zur Unterscheidung von Objekten des Modellbereiches
z. B. Ind = {1, ..., n}, KartenSymbole := {7, 8, 9, 10, Bube, Dame, König, Ass}

Funktionen auf Indexmengen modellieren ...

das Auftreten von Werten in Folgen:

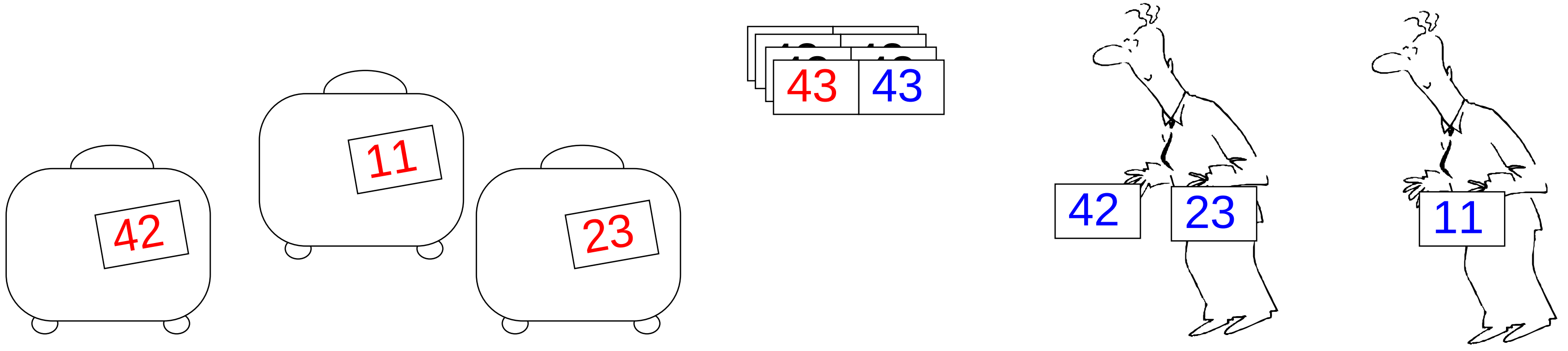
Beispiel:

eine Folge	F := (w, e, l, l, e)
Indexmenge dazu	FPositionen := {1, 2, 3, 4, 5}
Werte in der Folge	FWerte := {w, e, l}
Auftreten von Werten in der Folge	FAuftreten := {(1, w), (2, e), (3, l), (4, l), (5, e)}
Wertebereich	FAuftreten $\in$ FPositionen -> FWerte

Zuordnungen zwischen Mengen:

z. B. Gepäckstücke ihren Eigentümern zuordnen durch ein Funktionenpaar

Marke1 $\in$ Ind -> Gepäckstücke (injektiv) Marke2 $\in$ Ind -> Eigentümer



Hinweise zum Modellieren mit Wertebereichen

- Erst Grundmengen festlegen, dann Strukturen darüber bilden.
- Typische Elemente eines Wertebereiches angeben - der Wertebereich ist eine Menge davon.
- Wertebereichen ausdruckskräftige Namen geben.
- Zusammengesetzte Wertebereiche schrittweise aufbauen (oder zerlegen).
- Entwürfe prüfen: Wertebereiche in Worten erklären.
- Nur gleichartige Elemente in einem Wertebereich.
- Mengen, Tupel und Folgen beliebiger Länge nicht verwechseln.
- Alle Klammern haben Bedeutung - zusätzliche verändern das Modell.

Wertebereiche zur Modellierung des Getränkeautomaten

Folgende Aspekte des Getränkeautomaten
können durch Wertebereiche Modelliert werden:

- Getränkevarianten
- Vorrat an Getränken und Zutaten
- Vorrat an Wechselgeld
- Eingeworfene Münzen
- Betätigte Wahltasten
- Anzeige des Automaten
- Zustand des Automaten
- weitere Aspekte ...