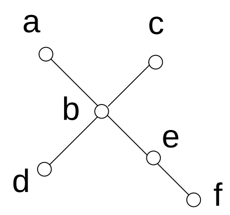
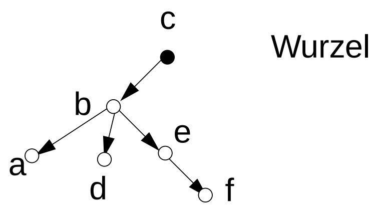
5.4 Modellierung mit Bäumen

In einem **ungerichteten Baum** gibt es **zwischen zwei beliebigen Knoten genau einen Weg**.

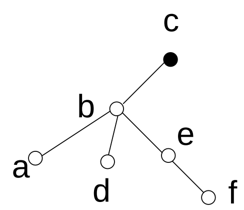


Ein gerichteter, **azyklischer** Graph G ist ein **gerichteter Baum**, wenn alle Knoten einen **Eingangsgrad** ≤ **1** haben und es genau einen Knoten mit **Eingangsgrad 0 gibt, er ist die Wurzel** von G. G ist ein **gewurzelter Baum**.



Man kann aus einem **ungerichteten Baum** in eindeutiger Weise einen gerichteten machen, indem man **einen Knoten zur Wurzel bestimmt**.

Deshalb wird in gewurzelten Bäumen häufig die **Kantenrichtung nicht angegeben**.



In einem gewurzelten Baum ist die **Höhe eines Knotens v** die größte Länge eines Weges von v zu einem Blatt. Die Höhe der Wurzel heißt **Höhe des Baumes**.

Knoten, die weder Wurzel noch Blatt sind heißen **innere Knoten**.

Vorlesung Modellierung WS 2011/12 / Folie 517

Ziele:

Zusammenhang: ungerichtet, gerichtet, gewurzelt

in der Vorlesung:

- Erläuterung der Begriffe an dem Beispiel.
- Andere Wurzeln zum selben ungerichteten Graphen
- Höhen bestimmen.

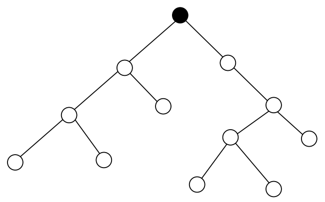
nachlesen:

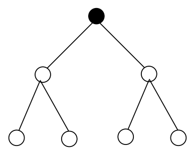
Kastens, Kleine Büning: Modellierung, Abschnitt 5.4

Binärbäume

Ein gewurzelter Baum heißt **Binärbaum**, wenn
seine Knoten einen **Ausgangsgrad von höchstens 2** haben.

Ein **Binärbaum heißt vollständig**, wenn jeder Knoten außer den Blättern den **Ausgangsgrad 2** hat und die **Wege zu allen Blättern gleich lang** sind.





Höhe 2

Knoten: 7

Blätter: 4

Ein vollständiger **Binärbaum der Höhe h** hat **2^h Blätter** und **2^{h+1}-1 Knoten**

Vorlesung Modellierung WS 2011/12 / Folie 518

Ziele:

Knotenzahlen in Binärbäumen verstehen

in der Vorlesung:

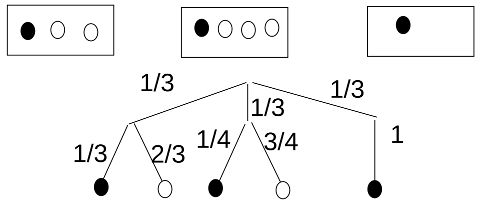
- Rekursive Struktur zeigen.
- Rekursive Berechnung der Knotenzahlen

nachlesen:

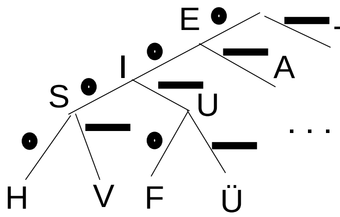
Kastens, Kleine Büning: Modellierung, Abschnitt 5.4

Modellierung von Entscheidungsbäumen

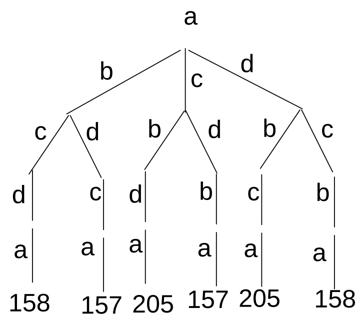
Knoten modelliert **Zwischenstand** einer
mehrstufigen Entscheidungsfolge
Kante modelliert eine der wählbaren **Alternativen**



1. **Wahrscheinlichkeiten**,
   z. B. erst Schachtel, dann Kugel ziehen:



2. **Codierungen**,
   Z. B. Morse-Code



3. **Lösungsbaum** für kombinatorische Probleme,
   z. B. Traveling Salesman's Problem (Mod-5.13)
   Blätter repräsentieren einen Rundwege von a aus,
   Kanten sind mit Entscheidungen markiert

4. **Spielzüge**, z. B. Schach (ohne Bild)

Wird **derselbe Zwischenstand** durch verschiedene Entscheidungsfolgen erreicht,
kann man **Knoten identifizieren**.
Es entsteht ein azyklischer oder zyklischer Graph.

Vorlesung Modellierung WS 2011/12 / Folie 519

Ziele:

Verschiedene Einsatzgebiete von Entscheidungsbäumen kennenlernen

in der Vorlesung:

Erläuterungen zu den Beispielen

nachlesen:

Kastens, Kleine Büning: Modellierung, Abschnitt 5.4

Modellierung von Strukturen durch Bäume

Knoten modelliert ein **Objekt**.
Kante modelliert **Beziehung „besteht aus“**, „enthält“, „spezialisiert zu“, ...

Beispiele:

- **Typhierarchie**: Typ - Untertypen
- **Klassenhierarchie**: Oberklasse als Abstraktion ihrer Unterklassen (Mod-5.21)
  Vererbungshierarchie: Unterklassen erben von ihrer Oberklasse
- **Objektbaum**: Objekt enthält (Referenzen auf) Teilobjekte
- **Kantorowitsch-Baum**: Operator mit seinen Operanden (Mod-5.22)
- **Strukturbaum**: (Programm-)Struktur definiert durch eine kontextfreie Grammatik (Mod-5.23)

Identifikation gleicher Teilbäume führt zu azyklischen Graphen (DAGs).

Vorsicht:
Identifikation muss mit der **Bedeutung der Kanten verträglich** sein;
z. B. Ein Gegenstand kann nicht dasselbe Objekt mehrfach als Teil enthalten,
wohl aber mehrere Objekte derselben Art.

Vorlesung Modellierung WS 2011/12 / Folie 520

Ziele:

Varianten von Baumstrukturen

in der Vorlesung:

- Prinzip der Modellierung von Baumstrukturen
- Varianten auf den folgenden 3 Folien

nachlesen:

Kastens, Kleine Büning: Modellierung, Abschnitt 5.4

Verständnisfragen:

Kennen Sie weitere Varianten von Baumstrukturen?

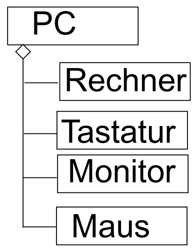
Klassen- und Objekthierarchien

Kompositionsbeziehung im Klassendiagramm (UML, Folie 6.19ff):

Knoten: **Klassen**

Kanten: definieren, **aus welcher Art von Objekten** ein Objekt **besteht**
z. B. ein Objekt der Klasse PC **besteht aus**
einem Rechner-Objekt, einem Tastatur-Objekt, ...

Diese Beziehung zwischen den Klassen könnte
auch ein allgemeiner Graph sein

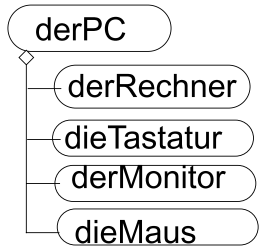


Objektbaum im Objektdiagramm (fast UML):

Knoten: **Objekte**

Kanten: definieren, **aus welchen Objekten** ein Objekt **besteht**
z. B. dieser PC besteht aus, diesem Rechner, ...

Diese Beziehung muss **konzeptionell ein Baum** sein.

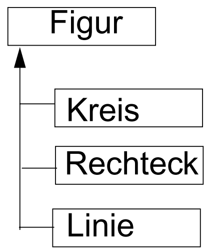


Vererbungsbeziehung im Klassendiagramm (UML Notation):

Knoten: **Klassen**

Kanten: Unterklasse **erbt von** -> Oberklasse
Oberklasse **ist Abstraktion** <- ihrer Unterklassen
Kanten sind zur Wurzel hin gerichtet

Baum bei Einfachvererbung (Java)
azyklischer Graph bei Mehrfachvererbung (C++)



Vorlesung Modellierung WS 2011/12 / Folie 521

Ziele:

UML Klassendiagramme, Vorgriff auf Abschnitt 6.4

in der Vorlesung:

Erläuterungen dazu:

- UML Klassendiagramme: Wichtiges Beschreibungsmittel in der Software-Technik.
- Klassendiagramme sind aus ER-Modell abgeleitet (siehe Kapitel 5)
- Klassendiagramme: nicht nur Bäume
- Unterscheidung von Objektiagrammen und Klassendiagrammen

nachlesen:

Kastens, Kleine Büning: Modellierung, Abschnitt 5.4

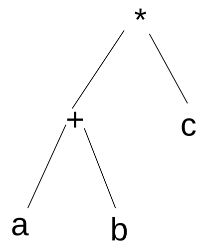
Kantorowitsch-Bäume

Darstellung der Struktur von Termen, Formeln, Ausdrücken
(siehe Mod-3.6)

Knoten: Operator, Blattoperand

Kanten: Verbindung zu den Operanden eines Operators
Die Kanten sind geordnet (Kantenmarkierung):
erster, zweiter, ... Operand

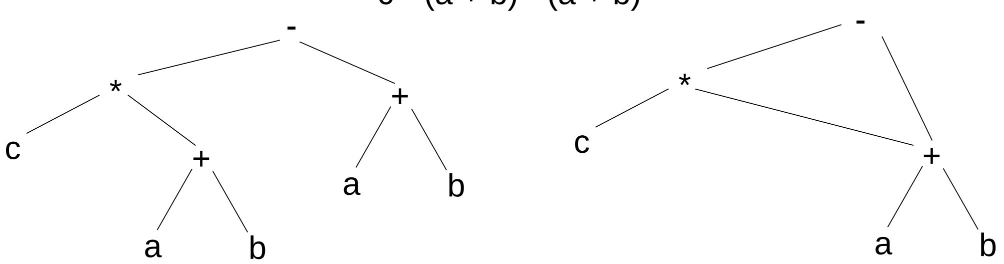
(a + b) * c



Identifikation gleicher Teilbäume führt zu azyklischen Graphen (DAGs):

Z. B. identifizieren Übersetzer gleiche Teilbäume, um Code zu erzeugen,
der sie nur einmal auswertet:

c * (a + b) - (a + b)



Vorlesung Modellierung WS 2011/12 / Folie 522

Ziele:

Erinnerung an Kantorowitsch-Bäume

in der Vorlesung:

Erläuterungen zu

- Ordnung der Kanten
- Identifikation von Teilbäumen

nachlesen:

Kastens, Kleine Büning: Modellierung, Abschnitt 5.4

Strukturbäume zu kontextfreien Grammatiken

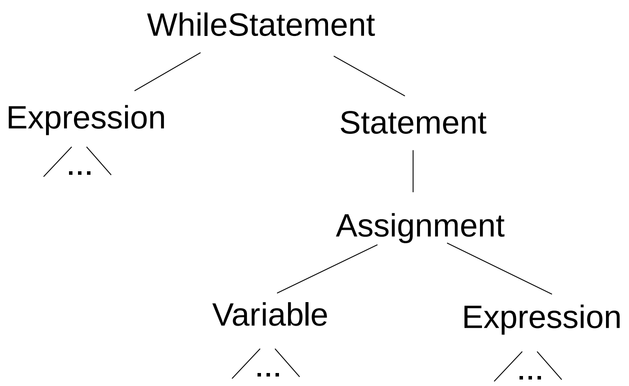
Kontextfreie Grammatiken definieren die Struktur von Programmen, Texten oder Daten.
Ein Programm, Text oder strukturierte Daten werden als Strukturbaum dargestellt.

Knoten: Programmkonstrukt (Nichtterminal der Grammatik)

Kante: Bezug zu Bestandteilen des Programmkonstruktes (Produktion der Grammatik)

Für die Repräsentation von Texten sind die **Kanten geordnet** (Kantenmarkierung)

Strukturbaum:




```
while(i<10)  a[i]   =    2*i    ;
```

Produktionen aus der kontextfreien Grammatik:

Statement ::= Assigment

Statement ::= WhileStatement

...

WhileStatement ::= Expression Statement

Assignment ::= Variable Expression

Vorlesung Modellierung WS 2011/12 / Folie 523

Ziele:

Strukturbaum am Beispiel kennenlernen

in der Vorlesung:

Erläuterungen dazu:

- Kontextfreie Grammatiken werden in Kapitel 6 eingeführt
- Bedeutung von Produktionen informell: "WhileStatement besteht aus Expression und Statement".
- Bezug zum Strukturbaum.

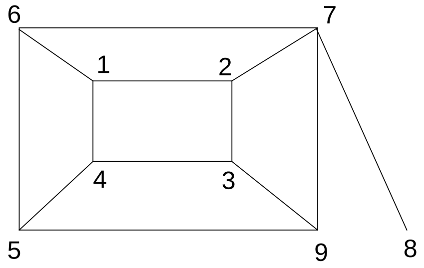
nachlesen:

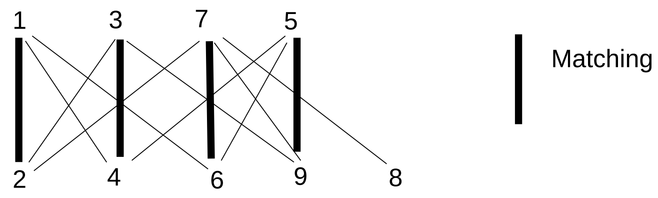
Kastens, Kleine Büning: Modellierung, Abschnitt 5.4

5.5 Zuordnungsprobleme

Aufgabenklasse **paarweise Zuordnung (Matching):**
Im ungerichteten Graphen G = (V, E) modelliert eine Kante {a, b} „a passt zu b“, ggf. mit einer Kantenmarkierung als Abstufung

Gesucht ist eine **maximale Menge unabhängiger Kanten**,
das ist einTeilgraph M mit allen Knoten aus V und möglichst vielen Kanten aus E,
so dass der **Grad der Knoten höchstens 1** ist. M heißt ein **Matching** der Knoten von G.





bipartiter Graph

Graph G heißt **bipartit**, wenn V in **2 disjunkte Teilmengen $V = V_1 \cup V_2$** zerlegt werden kann, so dass jede Kante zwei Knoten aus verschiedenen Teilmengen verbindet.

Häufig liefert die Aufgabenstellung schon bipartite Graphen, sogenannte **Heiratsprobleme**:

Mann - Frau   Aufgabe - Bearbeiter   Verbraucher - Produkte

Vorlesung Modellierung WS 2011/12 / Folie 524

Ziele:

Paarweise Zuordnung verstehen

in der Vorlesung:

- Matching-Begriff erläutern,
- bipartit erläutern,
- Beispiele angeben

nachlesen:

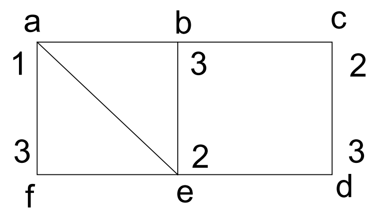
Kastens, Kleine Büning: Modellierung, Abschnitt 5.5

Konfliktfreie Knotenmarkierung (Färbung)

Aufgabenklasse **konfliktfreie Knotenmarkierung (Färbung):**
Im ungerichteten Graphen G = (V, E) modelliert eine Kante {a, b} **„a ist unverträglich mit b“**,

Gesucht ist eine Knotenmarkierung Färbung: V -> $\mathbb{N}$ („Farben“),
so dass durch eine **Kante verbundene Knoten verschiedene Marken haben**

Die **chromatische Zahl** eines Graphen G ist die minimale Zahl verschiedener „Farben“, die nötig ist, um G konfliktfrei zu markieren.



Es gilt: chromatische Zahl $\leq$ 1 + maximaler Knotengrad

Anwendungen:

Knoten:	**Kante:**	**Farbe / Marke:**
Staat auf Landkarte	gemeinsame Grenze	Farbe
Partygast	unverträglich	Tisch
Kurs	haben gemeinsame Teilnehmer	Termin
Prozess	benötigen gleiche Ressource	Ausführungszeitpunkt
Variable im Programm	gleichzeitig lebendig	Registerspeicher

Vorlesung Modellierung WS 2011/12 / Folie 525

Ziele:

Konzept der Färbung verstehen

in der Vorlesung:

- Erläuterung der Unverträglichkeitsrelation.
- Chromatische Zahlen einer Graphen.
- Erläuterung der Anwendungen.

nachlesen:

Kastens, Kleine Büning: Modellierung, Abschnitt 5.5

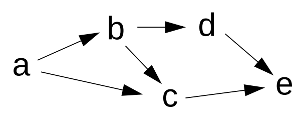
5.6 Abhängigkeitsprobleme

Graphen modellieren **Abhängigkeiten** zwischen Operationen und **Ausführungsreihenfolgen** von Operationen.

Abhängigkeitsgraph: gerichtet, azyklisch, voneinander abhängige Operationen.

Aufgaben dazu: sequentielle oder parallele **Anordnungen finden** (engl. **scheduling**).

Knoten: **Operation**, Ereignis; ggf. mit Dauer markiert
Kante: a -> b a ist **Vorbedingung** für b oder
b **benutzt** Ergebnis von a oder
a liest oder schreibt Ressource
bevor b sie überschreibt

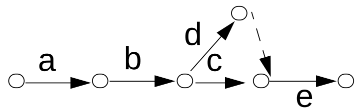


Anwendungen:

- **Projektplanung** mit abhängigen Teilaufgaben (PERT, CPM)
- abhängige **Transaktionen** mit einer Datenbank
- **Anordnung von Code** für die parallele Auswertung von Ausdrücken (Übersetzer)

Kritischer Pfad: längster Weg von einem Anfangsknoten zu einem Endknoten

Duale Modellierung:
Knoten: Ereignis, Anfang und Ende einer Operation
Kante: Operation, ggf. mit Dauer markiert



Vorlesung Modellierung WS 2011/12 / Folie 526

Ziele:

Prinzip der Abhängigkeitsgraphen verstehen

in der Vorlesung:

Erläuterungen zu

- Bedeutung von Knoten und Kanten
- Markierungen
- kritischem Pfad
- dualer Modellierung

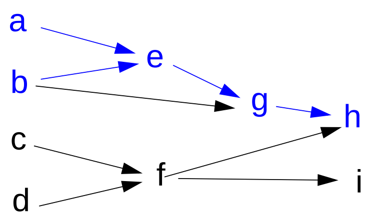
nachlesen:

Kastens, Kleine Büning: Modellierung, Abschnitt 5.6

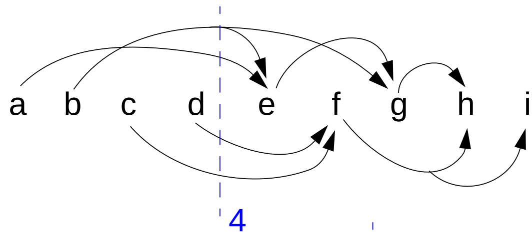
Anordnung von Abhängigkeitsgraphen

Anordnungsaufgaben:
gegebener Abhängigkeitsgraph

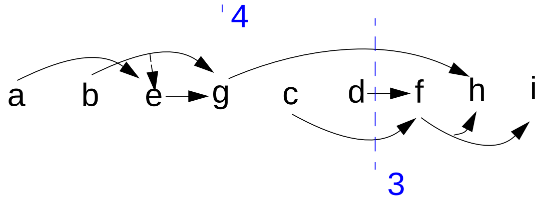
kritischer Pfad



sequentielle Anordnung der Knoten,
so dass **alle Kanten vorwärts** zeigen.

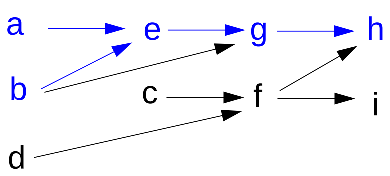


Meist sollen **Randbedingungen** erfüllt werden,
z. B. geringste Anzahl gleichzeitig benötigter Zwischenergebnisse im Speicher



parallele Anordnung mit
beschränkter Parallelität 3

Länge: 4 Schritte (Operationen)



Vorlesung Modellierung WS 2011/12 / Folie 527

Ziele:

Anordnungsaufgaben verstehen

in der Vorlesung:

Erläuterungen zu

- Kanten nur vorwärts
- sequentielle Anordnung: Anzahl der Operationen bestimmt die Länge
- Anzahl der Zwischenergebnisse
- parallele Anordnung: kritischer Pfad bestimmt die Länge

nachlesen:

Kastens, Kleine Büning: Modellierung, Abschnitt 5.6

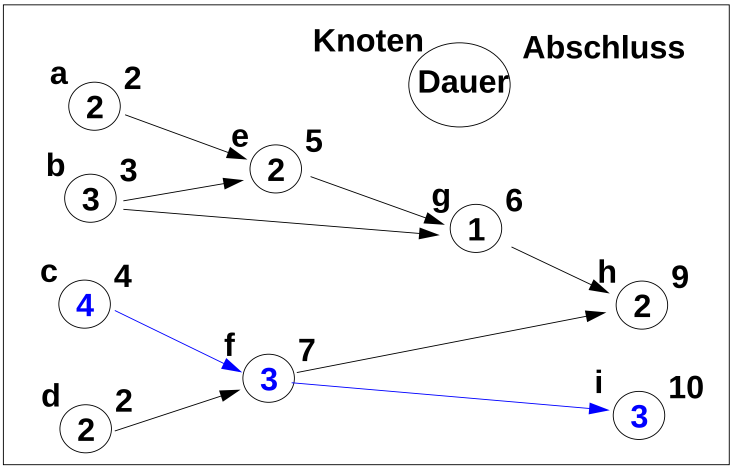
Operationen unterschiedlicher Dauer

Zwei **Knotenmarkierungen**:

Dauer der Operation und

frühester Abschlusstermin
= max. Abschluss der Vorgänger
+ Dauer des Knotens

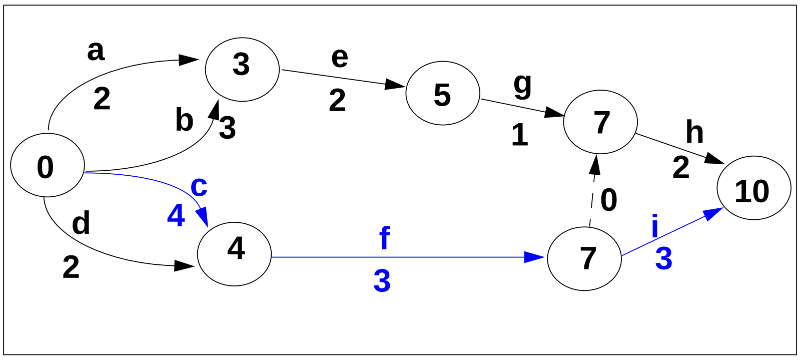
Kritischer Pfad gemäß maximaler
Summe der Dauer der Operationen



Duale Modellierung:

Kante: Operation
mit **Dauer** als Marke
Mehrfachkanten, Multigraph

Knoten: Ereignis
„vorangehende Operationen
sind abgeschlossen“
mit frühestem **Abschlusstermin**
als Marke



Vorlesung Modellierung WS 2011/12 / Folie 528

Ziele:

Ausführungsdauer modellieren

in der Vorlesung:

Erläuterungen zu

- den Knotenmarkierungen,
- der Berechnung des Abschlusstermins,
- dem Kritischen Pfad,
- der dualen Modellierung,
- der Notwendigkeit der zusätzlichen (gestrichelten) Kante

nachlesen:

Kastens, Kleine Büning: Modellierung, Abschnitt 5.6

Ablaufgraphen

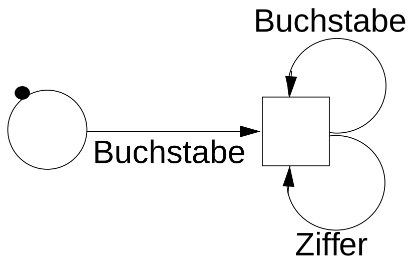
Gerichteter Graph (auch zyklisch) modelliert Abläufe.

Knoten: Verzweigungsstelle, Zustand
Kanten: Fortsetzungsmöglichkeit

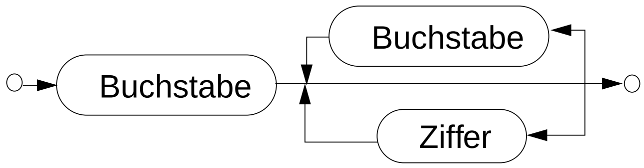
Jeder **Weg durch den Graphen** beschreibt einen **potenziellen Ablauf**
Die **Folge der Markierungen eines Weges** kann einen **Satz einer Sprache** modellieren.

Anwendungen:

- **Endlicher Automat** (siehe Kapitel 6)
  modelliert **Folgen von Zeichen**, Symbolen, ...
  Knoten: Zustand
  Kante: Übergang markiert mit Zeichen



- **Syntaxdiagramm**
  modelliert **Folgen von Zeichen**, Symbolen, ...
  Knoten: markiert mit Zeichen
  Kante a->b:„auf a kann b folgen“
  dual zum endlichen Automaten



- **Aufrufgraphen** (siehe Mod-5.30)
- **Ablaufgraphen** (siehe Mod-5.31)

Vorlesung Modellierung WS 2011/12 / Folie 529

Ziele:

Prinzip der Ablaufgraphen verstehen

in der Vorlesung:

- Erläuterungen am Beispiel des endlichen Automaten.
- Die Zeichnung hat keine Knotennamen, nur eine Kantenmarkierung.
- Syntaxdiagramme als dualen Beschreibung zum endlichen Automaten erklären,
- Die Zeichnung hat keine Knotennamen, nur eine Knotenmarkierung.
- Viele einzelne Kanten sind in der Zeichnung zu einem "Gleissystem" zusammengefasst.

nachlesen:

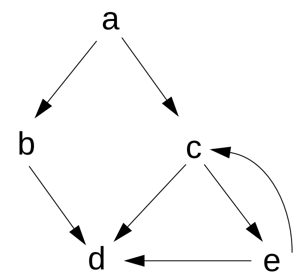
Kastens, Kleine Büning: Modellierung, Abschnitt 5.6

Aufrufgraphen

Gerichteter Aufrufgraph: **Aufrufbeziehung zwischen Funktionen** in einem Programm; wird benutzt in **Übersetzern** und in **Analysewerkzeugen** zur Software-Entwicklung.

Knoten: **Funktion** im Programm
Kante a -> b: Rumpf der Funktion a enthält einen Aufruf der Funktion b; **a könnte b aufrufen**

Zyklus im Aufrufgraph:
Funktionen, die sich **wechselweise rekursiv** aufrufen, z. B. (c, e, c)



Fragestellungen z. B.

- Welche Funktionen sind nicht rekursiv?
- Welche Funktionen sind nicht (mehr) erreichbar?
- Indirekte Wirkung von Aufrufen,
  z. B. nur e verändere eine globale Variable x;
  welche Aufrufe lassen x garantiert unverändert? b, d

Vorlesung Modellierung WS 2011/12 / Folie 530

Ziele:

Prinzip des Aufrufgraphen verstehen

in der Vorlesung:

- Erläuterungen dazu
- Weitere Eigenschaften und Anwendungen in der Vorlesung Übersetzer.

nachlesen:

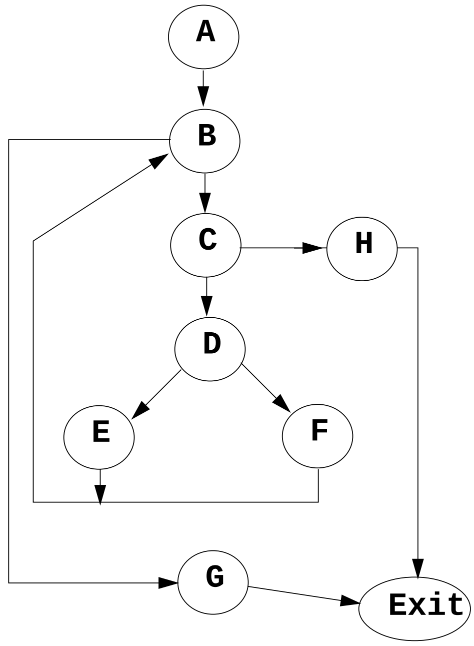
Kastens, Kleine Büning: Modellierung, Abschnitt 5.6

Programmablaufgraphen

Gerichteter Graph, modelliert **Abläufe durch ein verzweigtes Programm** (bzw. Funktion); wird benutzt in **Übersetzern** und in **Analysewerkzeugen** zur Software-Entwicklung.

Knoten: **unverzweigte Anweisungsfolge** (Grundblock), mit Verzweigung (Sprung) am Ende
Kante: **potenzieller Nachfolger im Ablauf**

```
ug = 0;                              A
og = obereGrenze;
while (ug <= og)                     B
{   mitte = (ug + og) / 2;           C
    if (a[mitte] == x)
          return mitte;              H
    else if (a[mitte] < x)           D
          ug = mitte + 1;            E
    else   og = mitte - 1;           F
}
return nichtGefunden;                G
```



Fragestellungen, z. B.

- Menge von Wegen, die den **Graph überdecken**, **Software-Testen**
- Wege mit bestimmten Eigenschaften, **Datenflussanalyse**

Vorlesung Modellierung WS 2011/12 / Folie 531

Ziele:

Prinzip des Programmablaufgraphen verstehen

in der Vorlesung:

- Erläuterungen zum Prinzip,
- Auch andere Abläufe als Programme können so modelliert werden.
- Weitere Eigenschaften und Anwendungen in der Vorlesung Übersetzer.

nachlesen:

Kastens, Kleine Büning: Modellierung, Abschnitt 5.6

Zusammenfassung zu Graphen

Problemklassen:

- Wegeprobleme
- Verbindungsprobleme
- Entscheidungsbäume
- hierarchische Strukturen
- Zuordnungsprobleme
- Abhängigkeitsprobleme
- Anordnungen in Folgen
- verzweigte Abläufe

Kanten- und Knotenbedeutung:

- verbunden, benachbart, ...
- Entscheidung, Alternative, Verzweigung
- Vorbedingung, Abhängigkeit
- (Un-)Verträglichkeit
- allgem. symmetrische Relation
- besteht aus, enthält, ist-ein
- (Halb-)Ordnungsrelation

Kanten-, Knotenmarkierungen:

- Entfernung, Kosten, Gewinn, ... bei Optimierungsproblemen
- „Färbung“, disjunkte Knotenmengen bei Zuordnungsproblemen
- Symbole einer Sprache

Vorlesung Modellierung WS 2011/12 / Folie 532

Ziele:

Übersicht zu Modellierungsaspekten

in der Vorlesung:

- Stichworte zum Einordnen von Modellierungsaufgaben,
- Hilfe zur Wahl einer passenden Variante von Graphen

nachlesen:

Kastens, Kleine Büning: Modellierung, Abschnitt 5.6