4. Modellierung mit Graphen

Modellierung beschreibt **Objekte und Beziehungen** zwischen ihnen.

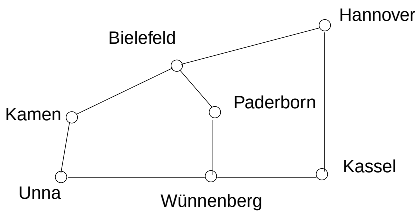
Graphen eignen sich zur Modellierung für ein **breites Aufgabenspektrum**.

Ein **Graph** ist eine Abstraktion aus Knoten und Kanten:

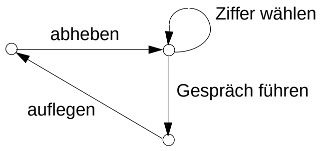
- **Knoten**: Eine Menge gleichartiger Objekte
- **Kanten**: Beziehung zwischen je zwei Objekten, 2-stellige Relation über Knoten

Je nach Aufgabenstellung werden **ungerichtete oder gerichtete** Graphen verwendet.

ungerichtet



gerichtet



Beschränkung auf **endliche Knotenmengen** und **2-stellige** Relation reicht hier aus.

Vorlesung Modellierung WS 2011/12 / Folie 501

Ziele:

Intuitives Verständnis von Graphen

in der Vorlesung:

Erläuterung der Begriffe und Beispiele

nachlesen:

Kastens, Kleine Büning: Modellierung, Abschnitt 5

Verständnisfragen:

- Geben Sie weitere Beispiele für Graphen an.

Themenübersicht

4.1 Grundlegende Definitionen
gerichteter, ungerichteter Graph, Graphdarstellungen, Teilgraphen, Grad, Markierungen

4.2 Wegeprobleme
Weg, Kreis, Rundwege, Zusammenhang

4.3 Verbindungsprobleme
Spannbaum

4.4 Modellierung mit Bäumen
gewurzelte Bäume, Entscheidungsbäume, Strukturbäume, Kantorowitsch-Bäume

4.5 Zuordnungsprobleme
konfliktfreie Markierung, bipartite Graphen

4.6 Abhängigkeitsprobleme
Anordnungen, Abfolgen

Vorlesung Modellierung WS 2011/12 / Folie 502

Ziele:

Vielfalt der Anwendungen von Graphen

in der Vorlesung:

- Eindruck der Aufgabenbereiche vermitteln,
- Beispiele skizzieren,
- gerichtete und ungerichtete Graphen zuordnen.

nachlesen:

Kastens, Kleine Büning: Modellierung, Abschnitt 5

5.1 Grundlegende Definitionen Gerichteter Graph

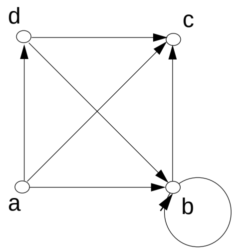
Ein **gerichteter Graph** G = (V, E) hat eine endliche **Menge V von Knoten** und eine **Menge E gerichteter Kanten**, mit $E \subseteq V \times V$.

Die Kantenmenge E ist eine **2-stellige Relation** über V.

Beispiel:

V = {a, b, c, d}

E = {(a, b), (a, c), (a, d), (b, b), (b, c), (d, b), (d, c)}



Eine Kante wird als (v, u) oder v -> u notiert.

Eine Kante (v, v) heißt **Schleife** oder Schlinge.

Die Definition von Graphen schränkt ein auf

- endliche Graphen mit **endlichen Knotenmengen**,
- einfache Kanten:
  - eine Kante verbindet nicht mehr als zwei Knoten,
  - von Knoten x nach Knoten y gibt es höchstens eine Kante

Multigraph: Es kann mehr als eine Kante von Knoten x nach Knoten y geben (siehe Mod-5.7)

Vorlesung Modellierung WS 2011/12 / Folie 503

Ziele:

Gerichteten Graph als Relation verstehen

in der Vorlesung:

Erläuterung der Begriffe.

Synonyme:

- Knoten: auch Ecke, engl. vertex
- Kante: engl. edge
- gerichtete Kante: engl. arc

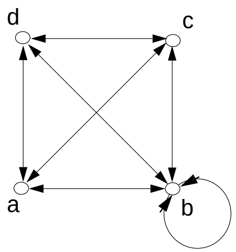
nachlesen:

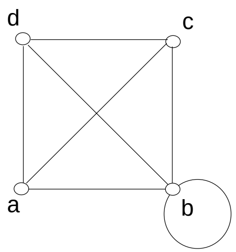
Kastens, Kleine Büning: Modellierung, Abschnitt 5.1

Ungerichteter Graph

Ist die **Kantenmenge** E eines gerichteten Graphen eine **symmetrische Relation**, so beschreibt er einen **ungerichteten Graphen**:
Zu jeder Kante x -> y aus E gibt es auch y -> x in E.

Wir fassen zwei Kanten x -> y, y -> x zu einer **ungerichteten Kante** zusammen:
{x, y} die Menge der Knoten, die die Kante verbindet.





Ungerichtete Graphen werden auch direkt definiert:

Ein **ungerichteter Graph** G = (V, E) hat eine endliche **Menge V von Knoten** und eine **Menge E ungerichteter Kanten, mit $E \subseteq \{ \{x, y\} \mid x, y \in V \}$**

Der abgebildete Graph mit ungerichteten Kanten:
V = {a, b, c, d}   E = { {a, b}, {a, c}, {a, d}, { b }, {b, c}, {d, b}, {d, c} }

In dieser Notation ist eine **Schleife eine 1-elementige Menge**, z. B. { b }

Vorlesung Modellierung WS 2011/12 / Folie 504

Ziele:

Zusammenhang zwischen gerichtetem und ungerichtetem Graph

in der Vorlesung:

- Zusammenhang erläutern,
- Definition gegenüberstellen

nachlesen:

Kastens, Kleine Büning: Modellierung, Abschnitt 5.1

Darstellung von Graphen

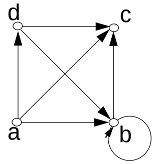
abstrakt:

Knotenmenge V = {a, b, c, d}

Kantenmenge E = {(a, b), (a, c), (a, d), (b, b), (b, c), (d, b), (d, c)}

anschaulich:

Graphik



Datenstrukturen für **algorithmische Berechnungen**:

Knotenmenge V als Indexmenge

lineare Ordnung der Knoten definieren

a, b, c, d

sei |V| = n

Adjazenzmatrix AM mit n * n Wahrheitswerten zur Darstellung der (gerichteten) Kanten:

AM(i, j) = (i, j) $\in$ E

	a	b	c	d
a	f	w	w	w
b	f	w	w	f
c	f	f	f	f
d	f	w	w	f

Adjazenzlisten: zu jedem Knoten i eine Folge von Knoten, zu denen er eine Kante hat (i, j) $\in$ E

a	**(b, c, d)**
b	**(b, c)**
c	**()**
d	**(b, c)**

Ungerichtete Graphen als gerichtete Graphen mit symmetrischer Kantenmenge darstellen

Vorlesung Modellierung WS 2011/12 / Folie 505

Ziele:

Datenstrukturen für Graphen kennenlernen

in der Vorlesung:

Erläuterungen zu den beiden Darstellungen

- Adjazenzmatrix: direkter Zugriff aber redundant
- Adjazenzlisten: kompakt aber Suche nach Kanten.

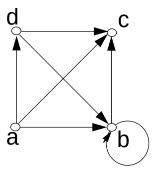
nachlesen:

Kastens, Kleine Büning: Modellierung, Abschnitt 5.1

Teilgraph

Der Graph G' = (V', E') ist ein **Teilgraph** des Graphen G = (V, E), wenn **V'** $\subseteq$ **V und E'** $\subseteq$ **E**. (Gilt für **gerichtete** und **ungerichtete** Graphen.)

Graph G = (V, E):



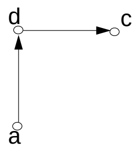
V = {a, b, c, d}

E = {(a, b), (a, c), (a, d), (b, b), (b, c), (d, b), (d, c)}

Teilgraph G’ = (V’, E’) zu G

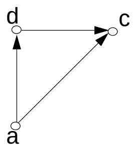
V’ = {a, c, d}

E’ = {(a, d), (d, c)}



Zu einem Graphen G = (V, E) **induziert** eine Teilmenge der Knoten V' $\subseteq$ V den **Teilgraphen** G' = (V', E'), wobei E' alle Kanten aus E enthält, deren Enden in V' liegen.

Teilgraph G” zu G durch V” = {a, c, d} **induziert**



Vorlesung Modellierung WS 2011/12 / Folie 506

Ziele:

Begriffe verstehen

in der Vorlesung:

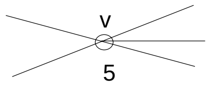
Erläuterungen und Beispiele dazu

nachlesen:

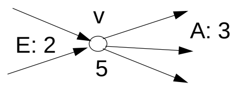
Kastens, Kleine Büning: Modellierung, Abschnitt 5.1

Knotengrad

Sei G = (V, E) ein **ungerichteter** Graph:
Der **Grad** eines Knotens v ist die
Anzahl der Kanten {x, v}, die in v enden.



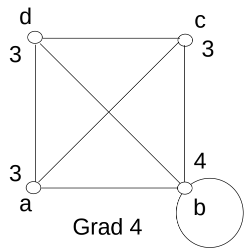
Sei G = (V, E) ein **gerichteter** Graph:
Der **Eingangsgrad** eines Knotens v ist die
Anzahl der Kanten (x, v) ∈ E, die in v münden.

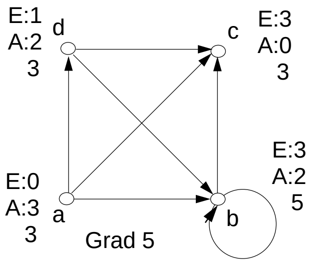


Der **Ausgangsgrad** eines Knotens v ist die
Anzahl der Kanten (v, x) ∈ E, die von v ausgehen.

Der **Grad** eines Knotens v ist die Summe seines
Eingangs- und Ausgangsgrades.

Der **Grad eines** gerichteten oder ungerichteten **Graphen** ist der **maximale Grad seiner Knoten**.





Vorlesung Modellierung WS 2011/12 / Folie 506a

Ziele:

Begriffe verstehen

in der Vorlesung:

Erläuterungen und Beispiele dazu

nachlesen:

Kastens, Kleine Büning: Modellierung, Abschnitt 5.1

Markierte Graphen

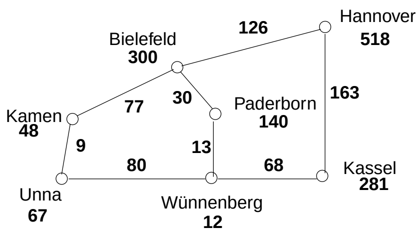
Ein Graph G = (V, E) modelliert eine Menge von **Objekten** V und die Existenz von **Beziehungen** zwischen ihnen.

Viele Aufgaben erfordern, dass den **Knoten und/oder den Kanten weitere Informationen** zugeordnet werden.

Dies leisten **Markierungsfunktionen**

Knotenmarkierung
MV : **V** → WV,
z.B. EinwohnerzahlTsnd: **V** → ℕ

Kantenmarkierung
ME :**E** → WE,
z.B. EntfernungKm: **E** → ℕ



Vorlesung Modellierung WS 2011/12 / Folie 507

Ziele:

Markierungen verstehen

in der Vorlesung:

Begriffe und Beispiele erläutern

nachlesen:

Kastens, Kleine Büning: Modellierung, Abschnitt 5.1

Verständnisfragen:

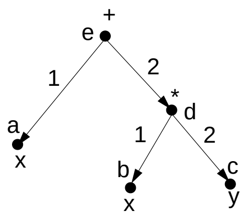
Geben Sie weitere Beispiel für Markierungen

Spezielle Kantenmarkierungen

Ordnung von Kanten:

$E \to \mathbb{N}$

legt die **Reihenfolge der Kanten** fest, die von einem Knoten ausgehen, z. B. im Kantorowitsch-Baum von links nach rechts.

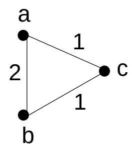


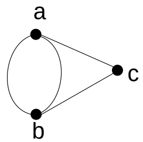
V := {a, b, c, d, e}
MV := {(a, x), (b, x), (c, y), (d,*), (e, +)}
ME := {((e,a), 1), ((e,d), 2), ((d,b), 1), ((d,c),2)}

Anzahl von Kanten:

$E \to \mathbb{N}$

modelliert **mehrfache Verbindungen zwischen denselben Knoten**.
G ist dann ein **Mehrfachgraph (Multigraph)**.
In der graphischen Darstellung schreibt man die Anzahl an die Kante oder zeichnet mehrere Kanten.





ME := {({a, b}, 2), ({a, c}, 1), ({b, c}, 1)}

Vorlesung Modellierung WS 2011/12 / Folie 507a

Ziele:

Markierungen verstehen

in der Vorlesung:

Begriffe und Beispiele erläutern

nachlesen:

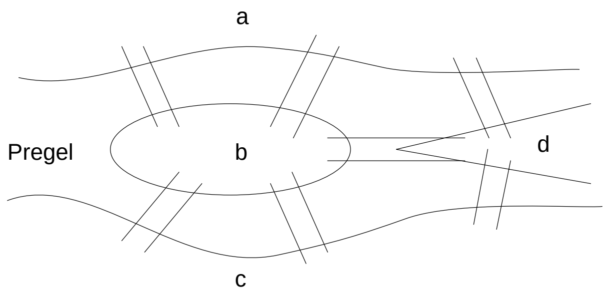
Kastens, Kleine Büning: Modellierung, Abschnitt 5.1

Verständnisfragen:

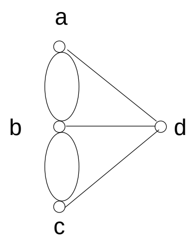
Geben Sie weitere Beispiel für Markierungen

5.2 Wegeprobleme

Beispiel: **Königsberger Brückenproblem** (Euler, 1736)



Skizze von Königsberg



Multigraph dazu

a. Gibt es einen Weg, der jede der 7 Brücken genau einmal überquert und zum Ausgangspunkt zurückkehrt?

b. Gibt es einen Weg, der jede der 7 Brücken genau einmal überquert?

Vorlesung Modellierung WS 2011/12 / Folie 508

Ziele:

Berühmtes Modellierungsbeispiel

in der Vorlesung:

- Modellierung zeigen
- Lösung erarbeiten

nachlesen:

Kastens, Kleine Büning: Modellierung, Abschnitt 5.2

Verständnisfragen:

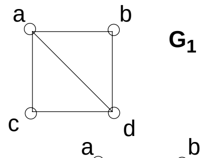
Hinweis:

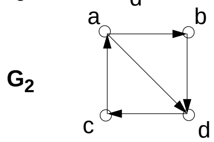
- a: Begründen Sie Ihre Antwort mit dem Grad der Knoten auf solch einem Rundweg.
- b: Für die Knoten, die nicht Endpunkte sind, gilt das Gleiche wie in (a).

Wege und Kreise

Sei G = (V, E) ein ungerichteter Graph.
Eine Folge von Knoten $(v_0, v_1, ..., v_n)$
mit $\{v_i, v_{i+1}\} \in E$ für i = 0,..., n-1
heißt ein **Weg von v_0 nach v_n**. Er hat die **Länge n** ≥ 0.

Entsprechend für gerichtete Graphen:
mit $(v_i, v_{i+1}) \in E$ für i = 0,..., n-1





Ein Weg $(v_0, v_1, ..., v_n)$ einer Länge n ≥ 1 mit $v_0 = v_n$
und **paarweise verschiedenen** Kanten $(v_0, v_1), ..., (v_{n-1}, v_n)$
heißt **Kreis im ungerichteten** Graphen und
Zyklus im gerichteten Graphen.

Ein gerichteter Graph der keinen Zyklus enthält heißt
azyklischer Graph (engl. **directed acyclic graph, DAG**).

Vorlesung Modellierung WS 2011/12 / Folie 509

Ziele:

Begriffe zu Wegen

in der Vorlesung:

Begriffe an Beispielen erläutern,

nachlesen:

Kastens, Kleine Büning: Modellierung, Abschnitt 5.2

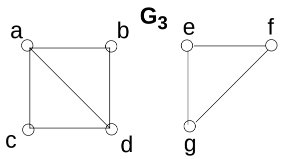
Zusammenhang in Graphen

Ein ungerichteter Graph G = (V, E) heißt **zusammenhängend**, wenn es für
beliebige Knoten v, w ∈ V einen Weg von v nach w gibt.

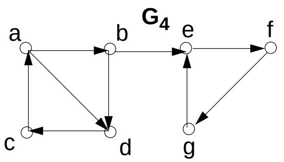
Ein gerichteter Graph heißt unter derselben Bedingung **stark zusammenhängend**.

Ein Teilgraph G' = (V', E') eines ungerichteten (gerichteten) Graphen G = (V, E) heißt **(starke) Zusammenhangskomponente**, wenn

- G' **(stark) zusammenhängend** ist und wenn
- G keinen anderen (stark) zusammenhängenden Teilgraphen G'' hat, der G' als Teilgraph enthält.



Zusammenhangskomponenten sind also
maximale Teilgraphen, die zusammenhängend sind.



Vorlesung Modellierung WS 2011/12 / Folie 510

Ziele:

Begriffe verstehen

in der Vorlesung:

Begriffe an Beispielen erläutern:

- G3 ist nicht zusammenhängend.
- G3 hat 2 Zusammenhangskomponenten.
- Der durch {a,c,d} induzierte Teilgraph ist nicht Zusammenhangskomponente von G3.
- G4 ist nicht stark zusammenhängend.
- G4 hat 2 starke Zusammenhangskomponenten.

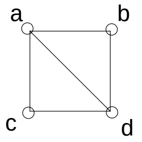
nachlesen:

Kastens, Kleine Büning: Modellierung, Abschnitt 5.2

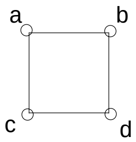
Spezielle Wege und Kreise

Sei G = (V, E) ein ungerichteter, zusammenhängender, schleifenfreier Graph.

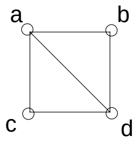
Ein **Euler-Weg** bzw. ein **Euler-Kreis** in G ist ein Weg, der **jede Kante aus E genau einmal** enthält.



(a, b, d, a, c, d)
Euler-Weg



(a, b, d, c, a)
Euler-Kreis



(a, b, d, c, a)
Hamilton-Kreis

G hat einen **Euler-Kreis** genau dann, wenn **alle Knoten geraden Grad** haben.

G hat einen **Euler-Weg**, der kein Kreis ist, genau dann, wenn G genau **2 Knoten mit ungeradem Grad** hat.

Ein **Hamilton-Kreis** enthält **jeden Knoten aus V genau einmal**.

Vorlesung Modellierung WS 2011/12 / Folie 511

Ziele:

Wege mit speziellen Eigenschaften

in der Vorlesung:

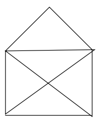
- Begriffe an Beispielen erläutern,
- Königsberger Brückenproblem lösen

nachlesen:

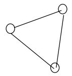
Kastens, Kleine Büning: Modellierung, Abschnitt 5.2

Wegeprobleme mit Euler-Wegen

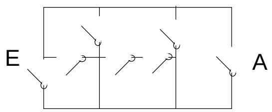
1. Königsberger Brückenproblem (Mod-5.8):
   Euler-Weg, Euler-Kreis
2. Kann man diese Figur in einem Zuge zeichnen?



3. Eine Inselgruppe mit n > 1 Inseln benötigt direkte Schiffsverbindungen zwischen allen Paaren von Inseln. Es gibt nur ein einziges Schiff. Kann es auf einer Tour alle Verbindungen genau einmal abfahren? Für welche n ist das möglich?



4. Planen Sie ein Gruselkabinett:
   Ein Haus mit n > 1 Räumen, 1 Eingangstür, eine Ausgangstür, beliebig vielen Innentüren. Jede Tür schließt nach Durchgehen endgültig. Die Besucher gehen einzeln durch das Haus. Es soll niemand eingesperrt werden.



Vorlesung Modellierung WS 2011/12 / Folie 512

Ziele:

Aufgaben modellieren lernen

in der Vorlesung:

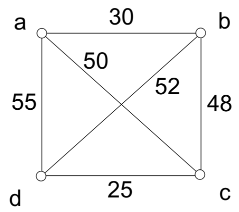
- Erläuterungen zu den Aufgaben.
- Die Graphen zu den Aufgaben zeigen;
- ihre Eigenschaften erkennen.
- In (4) ist wird jeder Raum und die Umgebung als ein Knoten modelliert.

nachlesen:

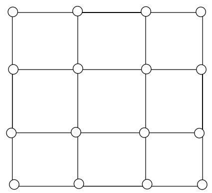
Kastens, Kleine Büning: Modellierung, Abschnitt 5.2

Wegeprobleme mit Hamilton-Kreisen

1. Traveling Salesman's Problem (Handlungsreisender): n Städte sind mit Straßen bestimmter Länge verbunden. Gesucht ist eine kürzeste Rundreise durch alle Städte.



2. In einem n * n Gitter von Prozessoren soll eine Botschaft sequentiell von Prozessor zu Prozessor weitergegeben werden. Sie soll jeden Prozessor erreichen und zum Initiator zurückkehren.
   Für welche n ist das möglich?



Vorlesung Modellierung WS 2011/12 / Folie 513

Ziele:

Aufgaben modellieren lernen

in der Vorlesung:

- Erläuterungen zu den Aufgaben.
- Die Eigenschaften der Graphen erkennen.
- In (1) wird die Entfernung als Kantenmarkierung modelliert.

Allgemeine Hinweise zum Modellieren mit Graphen:

- Rolle der Kanten sorgfältig klären, gerichtet, ungerichtet, markiert.
- Häufig wird der Graph selbst nicht gebraucht, sondern nur bestimmte Eigenschaften, wie Knotengrad.

nachlesen:

Kastens, Kleine Büning: Modellierung, Abschnitt 5.2

5.3 Verbindungsprobleme

Modellierung durch Graphen wie bei Wegeproblemen (Abschnitt 5.2), aber hier interessiert
die **Existenz von Verbindungen** (Wegen) zwischen Knoten,
die **Erreichbarkeit** von Knoten,
nicht bestimmte Knotenfolgen.

Sei G = (V, E) ein
ungerichteter, zusammenhängender Graph
für alle folgenden Begriffe:

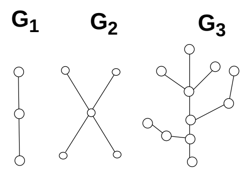
Wenn G **keine Kreise** enthält,
heißt er **(ungerichteter) Baum**.

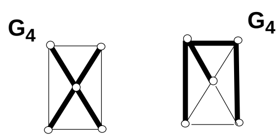
In Bäumen heißen **Knoten mit Grad 1 Blätter**.

Für jeden ungerichteten **Baum** G = (V, E) gilt
| E | = |V| - 1

Ein zusammenhängender Teilgraph von G,
der jeden Knoten aus V enthält und ein Baum ist,
heißt **Spannbaum** zu G.

Bäume





2 Spannbäume zu demselben Graphen G_4

Vorlesung Modellierung WS 2011/12 / Folie 514

Ziele:

Begriff Spannbaum verstehen

in der Vorlesung:

Erläuterungen und Beispiele zu den Begriffen.

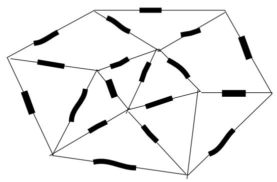
nachlesen:

Kastens, Kleine Büning: Modellierung, Abschnitt 5.3

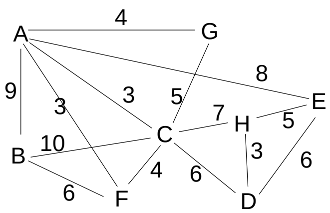
Modellierung mit Spannbäumen zu Graphen

Ein **Spannbaum** ist ein zusammenhängender Teilgraph mit der kleinsten Anzahl Kanten.
Er **modelliert kostengünstigen Zusammenhang**.

1. Aufständische Gefangene wollen eine minimale Anzahl von Gefängnistüren sprengen, so dass alle Gefangenen freikommen:



2. Alle Agenten A, ..., H sollen direkt oder indirekt miteinander kommunizieren. Die Risikofaktoren jeder paarweisen Verbindung sind:



Es soll ein Netz mit geringstem Risiko gefunden werden.

Vorlesung Modellierung WS 2011/12 / Folie 515

Ziele:

Anwendung von Spannbäumen erkennen

in der Vorlesung:

Erläuterungen zu den Modellierungen.

- zu 1: Knoten modellieren Räume und Umgebung, Kanten modellieren die Türen.
- zu 2: Graph mit Kantenmarkierung aufstellen; Spannbaum mit minimaler Kantensumme suchen.

nachlesen:

Kastens, Kleine Büning: Modellierung, Abschnitt 5.3

Verbindung und Zusammenhang

Sei G = (V, E) ein ungerichteter, zusammenhängender Graph.

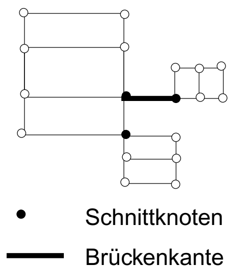
v ist ein **Schnittknoten** in G, wenn G **ohne v nicht mehr zusammenhängend** ist.

e ist eine **Brückenkante** in G, wenn G **ohne e nicht mehr zusammenhängend** ist.

G heißt **orientierbar**, wenn man für **jede Kante eine Richtung** so festlegen kann, dass der entstehende **gerichtete Graph stark zusammenhängend** ist.

G ist genau dann **orientierbar**, wenn G **keine Brückenkante** hat.

1. In der Innenstadt sollen zur Hauptverkehrszeit alle Straßen zu Einbahnstraßen werden. Bleiben alle Plätze von überall erreichbar?
2. In einer Stadt sollen einzelne Straßen zur Reparatur gesperrt werden. Bleiben alle Plätze von überall erreichbar?



Vorlesung Modellierung WS 2011/12 / Folie 516

Ziele:

Zusammenhang zerstören

in der Vorlesung:

Erläuterungen zu den Begriffe und Modellierungen.

- zu 1, 2: Gerichtete Brückenkante zerstört den Zusammenhang.

nachlesen:

Kastens, Kleine Büning: Modellierung, Abschnitt 5.3