4 Logik
4.1 Aussagenlogik

Kalkül zum **logischen Schließen**. Grundlagen: Aristoteles 384 - 322 v. Chr.

Aussagen: Sätze, die prinzipiell als wahr oder falsch angesehen werden können.
z. B.: „Es regnet.“, „Die Straße ist nass.“
aber „Dieser Satz ist falsch.“ ist in sich widersprüchlich, ist keine Aussage.

Junktoren verknüpfen Aussagen: „Es regnet nicht, **oder** die Straße ist nass.“

Aussagenlogische Formeln als Sätze einer formale Sprache:

z. B.	regen	$\rightarrow$	straßeNass	$\leftrightarrow$	$\neg$ regen	$\vee$	straßeNass
Belegung der Aussagen mit **Wahrheitswerten**:	f		w		f		w
Interpretation der Formel liefert Wahrheitswert:		w			w		
						w	
				w			

Formales Schließen im Gegensatz zur empirischen Beurteilung, z. B. ob „die Straße nass ist.“

Aus „Wenn es regnet, ist die Straße nass.“ **und** „Es regnet.“ **folgt** „Die Straße ist nass.“

Aussagen in der **Spezifikation**, in der **Modellierung** von Aufgaben

Vorlesung Modellierung WS 2011/12 / Folie 401

Ziele:

Einführung

in der Vorlesung:

Begriffe erläutern

nachlesen:

Kastens, Kleine Büning: Modellierung, Abschnitt 4.1.1

Vorschau auf Begriffe

- **Aussagenlogische Formeln** definiert durch
  Signatur der booleschen Algebra
- **Belegung von Variablen** mit Wahrheitswerten
- **Interpretation** aussagenlogischer Formeln
- **Gesetze der booleschen Algebra** zur Umformung von Formeln
- **erfüllbare** und **allgemeingültige** Formeln
- **logischer Schluss:** Folgerung aus einigen Annahmen

Vorlesung Modellierung WS 2011/12 / Folie 402

Ziele:

Übersicht

in der Vorlesung:

Zusammenhang der Begriffe zeigen

Beispiel: Aussagenlogik in der Spezifikation

Unfall durch fehlerhafte Spezifikation:

Airbus A320, Warschau (1993). Der zuständige Rechner blockiert bei der Landung die Aktivierung von Schubumkehr und Störklappen, wodurch das Flugzeug über das Landebahnende hinausschießt. Es herrschen starker Wind von schräg hinten und Aquaplaning auf der Landebahn.

Beabsichtigte Spezifikation der Störklappenfreigabe:

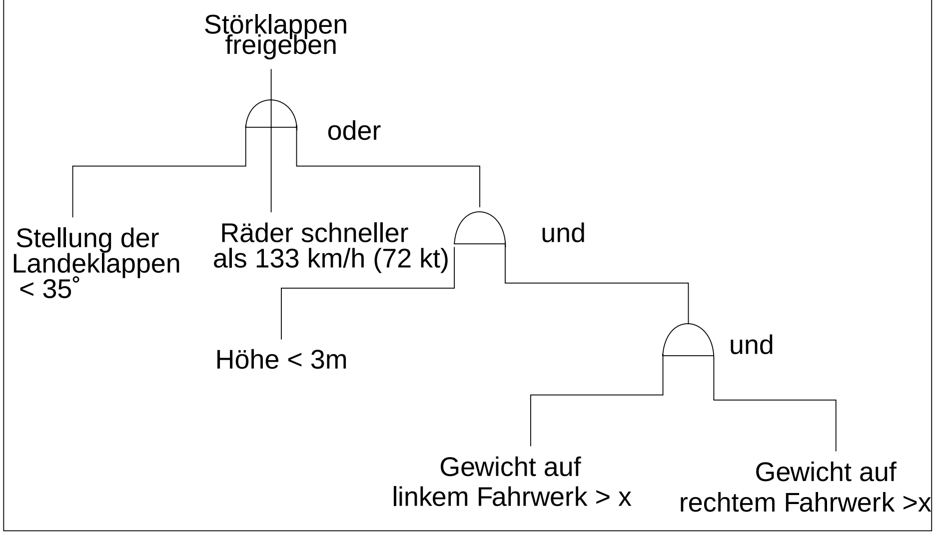
Die Störklappen dürfen benutzt werden

- im Reise- und Sinkflug (Bremswirkung)
- nach der Landung (Vernichtung des Auftriebes und Bremswirkung)

Sie dürfen nicht benutzt werden

- im Endanflug (gefährlicher Auftriebsverlust)

Tatsächliche Spezifikation der Störklappenfreigabe:



Vorlesung Modellierung WS 2011/12 / Folie 403

Ziele:

Einfaches Beispiel für verknüpfte Aussagen

in der Vorlesung:

- Begründung der Spezifikation
- Erläuterung der Unfallursache

Verständnisfragen:

Schlagen Sie eine Korrektur der Spezifikation vor.

Aussagenlogische Formeln

Aussagenlogische Formeln sind korrekte Terme mit Variablen zur Signatur der booleschen Algebra:

false:		-> Bool	falsch, f
true:		-> Bool	wahr, w
$\wedge$:	Bool x Bool	-> Bool	**Konjunktion**
$\vee$:	Bool x Bool	-> Bool	**Disjunktion**
$\neg$:	Bool	-> Bool	**Negation**

Erweiterung:

$\rightarrow$:	Bool x Bool	-> Bool	**Implikation** $p \rightarrow q$ für $\neg p \vee q$
$\leftrightarrow$:	Bool x Bool	-> Bool	**Äquivalenz** $p \leftrightarrow q$ für $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$

Operatoren (**Junktoren**) in **fallender Präzedenz**: $\neg\ \wedge\ \vee\ \rightarrow\ \leftrightarrow$

Variable, sowie false und true (Konstante) sind **atomare Aussagen**,
die übrigen Formeln sind **zusammengesetzt**.

Für **Variable** schreiben wir meist kleine Buchstaben p, q, ...
für **allgemeine Formeln** große Buchstaben F, G, H, ...

Die Definition der **Struktur** der Formeln heißt **Syntax der Aussagenlogik**.

Vorlesung Modellierung WS 2011/12 / Folie 404

Ziele:

Syntax der Aussagenlogik

in der Vorlesung:

- Term: nur Struktur;
- Formel: Term plus Bedeutung durch Regeln der Interpretation
- Signatur bestimmt Struktur der Terme und Formeln
- Beispiele
- Präzedenz und Klammerung

nachlesen:

Kastens, Kleine Büning: Modellierung, Abschnitt 4.1.1

Interpretation aussagenlogischer Formeln

Eine **passende Belegung** ordnet allen Variablen, die in einer Menge von Formeln *F* vorkommen, jeweils einen Wahrheitswert w oder f (für wahr oder falsch) zu.
Die Belegung kann als Substitution angegeben werden, z.B. σ = [p / w, q / f].

Eine **Interpretation** $\Im_\sigma$ einer aussagenlogischen Formel F bildet F auf einen Wahrheitswert ab:

- Für **Variable** ist die Interpretation $\Im_\sigma$ durch die **Belegung** σ definiert.
- Für **zusammengesetzte Formeln** wird sie durch folgende **Wahrheitstafeln** erweitert:

$\Im$(false)=f
$\Im$(true)=w

$\Im$(F)	$\Im(\neg$F)
w	f
f	w

$\Im$(F)	$\Im$(G)	$\Im(F \wedge G)$	$\Im(F \vee G)$	$\Im(F \rightarrow G)$	$\Im(F \leftrightarrow G)$
w	w	w	w	w	w
w	f	f	w	f	f
f	w	f	w	w	f
f	f	f	f	w	w

Eine Interpretation $\Im_\sigma$ mit einer Belegung σ für eine Formel F bestimmt einen **Wahrheitswert der Formel F:** $\Im_\sigma$(F)

Wenn $\Im_\sigma$(F) = w gilt, heißt $\Im_\sigma$ auch ein **Modell der Formel F.**

Vorlesung Modellierung WS 2011/12 / Folie 405

Ziele:

Wahrheitswerte zu aussagenlogischen Formeln

in der Vorlesung:

- Belegung erläutern
- Wir gehen davon aus, dass wir passende Belegungen zu der Menge der Formeln wählen, die wir gerade untersuchen.
- logische Verknüpfungen zeigen
- Interpretation: Belegung plus Verknüpfungen
- Beispiele dazu
- Bei n Variablen 2 hoch n verschiedene Belegungen

nachlesen:

Kastens, Kleine Büning: Modellierung, Abschnitt 4.1.1

Vorsicht beim Formalisieren umgangssprachlicher Aussagen

Vorsicht bei **Implikationen**; mit Belegungen prüfen, was gemeint ist:

1. **Wenn** es regnet, benutze ich den Schirm. regnet $\rightarrow$ schirm
2. Ich benutze den Schirm, **wenn** es regnet. regnet $\rightarrow$ schirm
3. Ich benutze den Schirm, **nur wenn** es regnet. schirm $\rightarrow$ regnet

„Oder“ kann fast immer in das **nicht-ausschließende** $\vee$ übersetzt werden:

4. Hast Du einen Euro oder zwei Fünfziger? euro $\vee$ zwei50er
5. Morgen fahre ich mit dem Zug oder mit dem Auto nach Berlin. zug $\vee$ auto
6. x ist kleiner y oder x ist gleich y. $x<y \vee x=y$
7. Der Händler gibt Rabatt oder ein kostenloses Autoradio. $\neg$ (rabatt $\leftrightarrow$ radio)

Aussagen sind häufig **kontext-abhängig**:

8. Weil ich die GP-Klausur nicht bestanden habe, nehme ich am zweiten Termin teil. $\neg$ gp-k1 $\wedge$ gp-k2
9. Weil ich die Modellierungsklausur bestanden habe, nehme ich am zweiten Termin nicht teil. mod-k1 $\wedge \neg$ mod-k2

Klammern sind meist nur aus dem Kontext erkennbar:

10. Sie wollten nicht verlieren oder unentschieden spielen. $\neg$ (verlieren $\vee$ unentschieden)

Vorlesung Modellierung WS 2011/12 / Folie 406

Ziele:

Sorgfältig formalisieren

in der Vorlesung:

Erläuterungen dazu

- Aussagenlogische Formeln zu den Sätzen entwickeln
- Begründungen dazu.
- Vorsicht beim Übertragen von Umgangssprache in Formeln, insbesondere bei Klammerung und Implikation.

Erfüllbarkeit von Formeln

Eine Formel F heißt **erfüllbar**, wenn es
eine Interpretation $\Im_\sigma$ mit einer Belegung σ gibt, so dass gilt $\Im_\sigma$ (F) = w,
sonst ist sie **widerspruchsvoll** (**unerfüllbar**), d.h.
für alle Interpretationen $\Im_\sigma$ mit einer Belegung σ gilt $\Im_\sigma$ (F) = f.

z. B. $p \wedge q$ ist erfüllbar; $p \wedge \neg p$ ist widerspruchsvoll.

Eine Formel F heißt **allgemeingültig** oder **Tautologie**, wenn
für alle ihre Interpretationen $\Im_\sigma$ (F) = w gilt.

z. B. $p \vee \neg p$.

Eine Formel F ist genau dann allgemeingültig, wenn $\neg$ F widerspruchsvoll ist.

allgemein-gültig F	erfüllbar aber nicht allgemeingültig	widerspruchs-voll $\neg$ F

Vorlesung Modellierung WS 2011/12 / Folie 407

Ziele:

Begriffe zur Erfüllbarkeit verstehen

in der Vorlesung:

- Weitere Beispiele dazu
- Schematische Einteilung der Formelmengen

nachlesen:

Kastens, Kleine Büning: Modellierung, Abschnitt 4.1.1

Gesetze der booleschen Algebra

Zwei Formeln F, G sind **logisch äquivalent**, **$F \equiv G$**,
wenn sie **für alle Interpretationen** $\Im$ dasselbe Ergebnis haben: $\Im(F) = \Im(G)$

Für alle aussagenlogischen Fomeln X, Y, Z gelten folgende **logische Äquivalenzen**:

$(X \wedge Y) \wedge Z \equiv X \wedge (Y \wedge Z)$	$(X \vee Y) \vee Z \equiv X \vee (Y \vee Z)$	Assoziativität
$X \wedge Y \equiv Y \wedge X$	$X \vee Y \equiv Y \vee X$	Kommutativität
$X \wedge X \equiv X$	$X \vee X \equiv X$	Idempotenz
$X \vee (Y \wedge Z) \equiv (X \vee Y) \wedge (X \vee Z)$	$X \wedge (Y \vee Z) \equiv (X \wedge Y) \vee (X \wedge Z)$	Distributivität
$X \vee (X \wedge Y) \equiv X$	$X \wedge (X \vee Y) \equiv X$	Absorption
$X \wedge \text{false} \equiv \text{false}$ $X \wedge \text{true} \equiv X$	$X \vee \text{false} \equiv X$ $X \vee \text{true} \equiv \text{true}$	Neutrale Elemente
$X \wedge \neg X \equiv \text{false}$	$X \vee \neg X \equiv \text{true}$	Komplement
$\neg \neg X \equiv X$		Involution
$\neg (X \wedge Y) \equiv \neg X \vee \neg Y$	$\neg (X \vee Y) \equiv \neg X \wedge \neg Y$	De Morgan

Vorlesung Modellierung WS 2011/12 / Folie 408

Ziele:

Übersicht zu Rechenregeln

in der Vorlesung:

- Überprüfung von Gesetzen durch Wahrheitstafeln
- Anwenden von Gesetzen

nachlesen:

Kastens, Kleine Büning: Modellierung, Abschnitt 3.2

Umformen mit Gesetzen der booleschen Algebra

Beispiel:

$(A \vee \underline{\neg (B \wedge A)}) \wedge (C \vee (D \vee C)) \equiv$	De Morgan
$(A \vee \underline{(\neg B \vee \neg A)}) \wedge (C \vee (D \vee C)) \equiv$	Kommutativität
$(\underline{A \vee (\neg A \vee \neg B)}) \wedge (C \vee (D \vee C)) \equiv$	Assoziativität
$(\underline{(A \vee \neg A)} \vee \neg B) \wedge (C \vee (D \vee C)) \equiv$	Komplement
$(\underline{true \vee \neg B}) \wedge (C \vee (D \vee C)) \equiv$	Kommutativität
$(\underline{\neg B \vee true}) \wedge (C \vee (D \vee C)) \equiv$	Neutrale Elemente
$\underline{true \wedge (C \vee (D \vee C))} \equiv$	Kommutativität
$\underline{(C \vee (D \vee C)) \wedge true} \equiv$	Neutrale Elemente
$(C \vee (\underline{D \vee C})) \equiv$	Kommutativität
$(\underline{C \vee (C \vee D)}) \equiv$	Assoziativität
$((\underline{C \vee C}) \vee D) \equiv$	Idempotenz
$C \vee D$	

Vorlesung Modellierung WS 2011/12 / Folie 409

Ziele:

Anwenden der Gesetze üben

in der Vorlesung:

- Schrittweise umformen mit Angabe der Teilformel und des Gesetzes, das darauf angewandt wird.
- Hier wird sehr ausführlich auch jeder kleine Schritt angegeben.
- Meist fasst man mehrere Schritte zusammen.
- **jeder Schritt einzeln (PDF)**

nachlesen:

Kastens, Kleine Büning: Modellierung, Abschnitt 3.2

Logischer Schluss

Sei A eine Menge von Formeln und F eine Formel.
Wenn für **alle Interpretationen** $\Im$, die alle Formeln in A erfüllen, auch $\Im$ (F) gilt, dann sagen wir

„F folgt semantisch aus A" **A |= F**

A |= F heißt auch **logischer Schluss**,
A **Annahme** oder Antezedent, F **Folgerung** oder Konsequenz.

Die **Korrektheit eines logischen Schlusses** A |= F mit $\mathrm{A} = \{A_1, ..., A_n\}$ kann man prüfen:

a. durch Prüfen aller Interpretationen, die alle Formeln in A erfüllen

b. durch Wiederspruchsbeweis: $\mathbf{A_1 \wedge ... \wedge A_n \wedge \neg F}$ muss **widerspruchsvoll** sein.

Beweise werden aus logischen Schlüssen aufgebaut.

Beispiel:

U: Wenn alle Menschen gleich sind, gibt es keine Privilegien.

V: Es gibt Privilegien.

W: Nicht alle Menschen sind gleich.

nachweisen: **{ U, V } |= W** ist ein **korrekter logischer Schluss**.

Vorlesung Modellierung WS 2011/12 / Folie 410

Ziele:

Grundbegriff des logischen Schlusses verstehen

in der Vorlesung:

- Beispiele für logische Schlüsse zeigen
- Unterscheiden: logischer Schluss A |= F und aussagenlogische Formel A -> F

nachlesen:

Kastens, Kleine Büning: Modellierung, Abschnitt 4.1.2

Übungsaufgaben:

Mit logischen Aussagen Eigenschaften des Getränkeautomaten, seiner Bedienung und seiner Zustände beschreiben.
Prüfen, ob die Aussagen erfüllbar sind.