# 2x Beweise verstehen und konstruieren

**Beweise werden in vielen Gebieten der Informatik benötigt**

- innerhalb von **Informatik-Theorien**
  z.B. Komplexität von Aufgaben und Algorithmen
- **Eigenschaften von modellierten Aufgaben**
  z.B. Falls ein ungerichteter Graph zusammenhängend ist, gibt es mindestens einen Weg von Knoten a nach Knoten b.
- **Entwurf von Hardware und Software**
  z.B. Diese Synchronisation der „Dining Philosophers“ führt nie zur Verklemmung.
- **Eigenschaften implementierter Software oder Hardware**
  Verifikation von Programmeigenschaften

Dieses Thema wird im Buch „Modellierung“ im Abschnitt 4.3 behandelt.

© 2010 bei Prof. Dr. Uwe Kastens

## Vorlesung Modellierung WS 2011/12 / Folie 251

**Ziele:**

Beweisen in der Informatik motivieren

**in der Vorlesung:**

Erläuterungen dazu



# Beispiel 1

**Satz 2x.1:**

Seien A und B zweistellige, antisymmetrische Relationen über der Menge M. Dann ist $C = A \cup B$ auch eine antisymmetrische Relation.

**Beweis:**

Wegen der Definition von antisymmetrisch gilt:
Für alle $x, y \in M$ gilt: Aus x A y und y A x folgt x = y.

Ebenso gilt:
Für alle $x, y \in M$ gilt: Aus x B y und y B x folgt x = y.

Wegen $C = A \cup B$ sind alle Elemente aus A oder B auch Elemente von C und es gilt:
Für alle $x, y \in M$ gilt: Aus x C y und y C x folgt x = y.

Also ist auch C antisymmetrisch. **qed.**

© 2011 bei Prof. Dr. Uwe Kastens

## Vorlesung Modellierung WS 2011/12 / Folie 252

**Ziele:**

Beweis verstehen und prüfen

**in der Vorlesung:**

Erläuterungen dazu

# Gegenbeispiel

**Der Satz 2x.1**

Seien A und B zweistellige, antisymmetrische Relationen über der Menge M. Dann ist C = A ∪ B auch eine antisymmetrische Relation.

**ist nicht korrekt**. Man kann ihn durch ein **Gegenbeispiel widerlegen**:

z.B. A = {(a, a), (b, c)}, B = {(d, d), (c, b)}, C = {(a, a), (b, c), (d, d), (c, b)}

**Der „Beweis“ von Satz 2x.1 ist fehlerhaft.**

© 2007 bei Prof. Dr. Uwe Kastens



**Ziele:**

Beweis verstehen und prüfen

**in der Vorlesung:**

Erläuterungen dazu



# Beispiel 2

**Satz 2x.2:**

Seien A und B zweistellige, symmetrische Relationen über der Menge M. Dann ist C = A ∪ B auch eine symmetrische Relation.

**Beweis:**

Sind A und B leer, dann ist auch C leer und ist gemäß Definition symmetrisch.

Ist C nicht leer, dann sei x C y für beliebige x und y.

Wegen C = A ∪ B gilt x A y oder x B y.

Falls x A y gilt, dann ist auch y A x, weil A symmetrisch ist.
Wegen C = A ∪ B ist auch y C x.

Falls x B y gilt, dann ist auch y B x, weil B symmetrisch ist.
Wegen C = A ∪ B ist auch y C x.

Also folgt aus x C y auch y C x. Deshalb ist auch C symmetrisch.

**qed.**

© 2007 bei Prof. Dr. Uwe Kastens



**Ziele:**

Beweis verstehen und prüfen

**in der Vorlesung:**

Erläuterungen dazu

# Eigenschaften von Beweisen

**Beweise können**

- korrekt oder fehlerhaft,
- verständlich oder unverständlich,
- elegant oder umständlich,
- wohl-strukturiert oder verschlungen

**sein.**

**Zur Konstruktion von Beweisen gibt es**

- **Regeln, Methoden, Strukturen, Strategien.**

Dazu wird in diesem Abschnitt eingeführt.
Erst Kapitel 4 liefert die notwendigen Grundlagen der Logik.
Das Buch [D. J. Velleman: How to prove it] enthält umfassendes Material zu diesem Thema.

**Manche Beweise benötigen außerdem eine gute Beweisidee.**

© 2007 bei Prof. Dr. Uwe Kastens



**Ziele:**

Ziel dieses Abschnittes erkennen

**in der Vorlesung:**

Erläuterungen dazu



# Form von Satz und Beweis

Ein **Satz (Theorem)** besteht aus
**Voraussetzungen (Prämissen)** und einer **Behauptung (Konklusion)**.

Voraussetzungen und Behauptung sind Aussagen.
Wenn alle Voraussetzungen wahr sind, dann muss auch die Behauptung wahr sein.

**Satz 2x.2**:
Seien A und B zweistellige, symmetrische Relationen über der Menge M.
Dann ist $C = A \cup B$ auch eine symmetrische Relation.

Der **Beweis** eines Satzes muss nachweisen, dass die Behauptung wahr ist und kann dabei verwenden

- die Voraussetzungen,
- Definitionen oder bekannte Tatsachen,
- im Beweis selbst oder anderweitig als wahr bewiesene Aussagen,
- Schlussregeln.

© 2007 bei Prof. Dr. Uwe Kastens



**Ziele:**

Grundbegriffe zu Satz und Beweis

**in der Vorlesung:**

Erläuterungen dazu

## Beweisstruktur Fallunterscheidung

Beweise können in **Fallunterscheidungen** gegliedert sein. Typische Gründe dafür:

- **Sonderfall** abspalten (z.B. leer, nicht leer)
- ***oder* in der Voraussetzung** (z.B. $(x, y) \in C = A \cup B$ bedeutet $(x, y) \in A$ ***oder*** $(x, y) \in B$)
- ***und* in der Behauptung** (Beispiel später)

leer

nicht leer

$(x, y) \in A$

$(x, y) \in B$

**Beweis 2x.2:**

Sind A und B leer, dann ist auch C leer und ist gemäß Definition symmetrisch.

Ist C nicht leer, dann sei x C y für beliebige x und y.

Wegen $C = A \cup B$ gilt x A y oder x B y.

Falls x A y gilt, dann ist auch y A x, weil A symmetrisch ist.
Wegen $C = A \cup B$ ist auch y C x.

Falls x B y gilt, dann ist auch y B x, weil B symmetrisch ist.
Wegen $C = A \cup B$ ist auch y C x.

Also folgt aus x C y auch y C x.

Deshalb ist auch C symmetrisch. **qed.**

© 2011 bei Prof. Dr. Uwe Kastens

### Vorlesung Modellierung WS 2011/12 / Folie 257

**Ziele:**

Beweise durch Fallunterscheidung strukturieren

**in der Vorlesung:**

Erläuterungen dazu



## Implikation als Behauptung

**Satz 2x.3:**
Sei R eine zweistellige Relation über der Menge M.
Wenn **a R b und b R a mit $a \neq b$**, dann ist R **weder eine Halbordnung (HO)**, **noch eine strenge Halbordnung (sHO)**, **noch eine totale Ordnung (tO)**.

Die **Behauptung des Satzes** hat die Form

**P** **impliziert** (Q1 und Q2 und Q3)
(a R b und b R a mit $a \neq b$) **impliziert** (**nicht** HO **und nicht** sHO **und nicht** tO)

Hier kann man zwei **Techniken zur Gliederung des Beweises** anwenden:

- **Behauptung P impliziert Q: füge P zu den Voraussetzungen und beweise Q.**
- **Behauptung $Q_1$ und $Q_2$ und ...: beweise jedes $Q_i$ in einem einzelnen Fall.**

Damit bekommt der Beweis 2x.3 folgende Struktur:

Beweis 2x.3:
Wir nehmen an, es gelte P = (a R b und b R a mit $a \neq b$)
Beweis aus Voraussetzung und P folgt nicht HO
Beweis aus Voraussetzung und P folgt nicht sHO
Beweis aus Voraussetzung und P folgt nicht tO
also aus P folgt (nicht HO und nicht sHO und nicht tO)

© 2011 bei Prof. Dr. Uwe Kastens

### Vorlesung Modellierung WS 2011/12 / Folie 258

**Ziele:**

Zwei Techniken zur Beweisstrukturierung

**in der Vorlesung:**

Erläuterungen dazu

# Beweisstruktur ausfüllen

**Beweis 2x.3:**
Wir nehmen an, es gelte **a R b und b R a mit a ≠ b** für die zweistellige Relation R über der Menge M.

1. Dann verletzen a R b und b R a die Definition für Antisymmetrie. Also ist R **nicht eine Halbordnung**.
2. Da R gemäß (1) nicht antisymmetrisch ist, ist R auch **nicht eine totale Ordnung**.
3. Gemäß Satz 2x.4 (Mod-2.61) ist **R nicht eine strenge Halbordnung**.

Also folgt aus **a R b und b R a mit a ≠ b,** dass R **weder eine Halbordnung**, **noch eine strenge Halbordnung**, **noch eine totale Ordnung** ist. **qed.**

© 2011 bei Prof. Dr. Uwe Kastens

## Vorlesung Modellierung WS 2011/12 / Folie 259

**Ziele:**
Beweisstruktur ausfüllen

**in der Vorlesung:**
Erläuterungen dazu



# Konstruktionshilfen am Beispiel für Beweis 2x.3

**gültige Aussagen:**
$R \in Pow(M \times M)$

**Behauptungen:**
$a\ R\ b \wedge b\ R\ a \wedge a \neq b$
$\rightarrow (\neg HO \wedge \neg sHO \wedge \neg tO)$

**Beweisstruktur:**

© 2011 bei Prof. Dr. Uwe Kastens

## Vorlesung Modellierung WS 2011/12 / Folie 259b

**Ziele:**
Beweis konstruieren

**in der Vorlesung:**
Erläuterungen dazu

- Ausgehen von Voraussetzungen und Behauptung.
- Behauptung vereinfachen, zerlegen, transformieren.
- Definitionen zu gültigen Aussagen hinzunehmen.
- Weitere gültige Aussagen ableiten.
- Beweis ausformulieren.

## Konstruktionshilfen am Beispiel für Beweis 2x.3

**gültige Aussagen:**

$R \in Pow(M \times M)$

$a\ R\ b \wedge b\ R\ a \wedge a \neq b$ (wg. Implik. in Beh.)

**Behauptungen:**

$\cancel{a\ R\ b \wedge b\ R\ a \wedge a \neq b \rightarrow (\neg HO \wedge \neg sHO \wedge \neg tO)}$

$\neg HO \wedge \neg sHO \wedge \neg tO$

**Beweisstruktur:**

Wir nehmen an, es gelte $Z = (a\ R\ b \wedge b\ R\ a \wedge a \neq b)$

Beweis aus Voraussetzung und Z folgt $\neg HO \wedge \neg sHO \wedge \neg tO$

also aus Z folgt (nicht HO und nicht sHO und nicht tO)

© 2011 bei Prof. Dr. Uwe Kastens

### Vorlesung Modellierung WS 2011/12 / Folie 259c

**Ziele:**

Beweis konstruieren

**in der Vorlesung:**

Erläuterungen dazu

- Ausgehen von Voraussetzungen und Behauptung.
- Behauptung vereinfachen, zerlegen, transformieren.
- Definitionen zu gültigen Aussagen hinzunehmen.
- Weitere gültige Aussagen ableiten.
- Beweis ausformulieren.



## Konstruktionshilfen am Beispiel für Beweis 2x.3

**gültige Aussagen:**

$R \in Pow(M \times M)$

$a\ R\ b \wedge b\ R\ a \wedge a \neq b$ (wg. Implik. in Beh.)

**Behauptungen:**

$\cancel{a\ R\ b \wedge b\ R\ a \wedge a \neq b \rightarrow (\neg HO \wedge \neg sHO \wedge \neg tO)}$

$\cancel{\neg HO \wedge \neg sHO \wedge \neg tO}$

$\neg HO$ (3 Fälle wg. Konjunktion)

$\neg sHO$

$\neg tO$

**Beweisstruktur:**

Wir nehmen an, es gelte $Z = (a\ R\ b \wedge b\ R\ a \wedge a \neq b)$

~~Beweis aus Voraussetzung und Z folgt $\neg HO \wedge \neg sHO \wedge \neg tO$~~

Beweis aus Voraussetzung und Z folgt nicht HO

Beweis aus Voraussetzung und Z folgt nicht sHO

Beweis aus Voraussetzung und Z folgt nicht tO

also aus Z folgt (nicht HO und nicht sHO und nicht tO)

© 2011 bei Prof. Dr. Uwe Kastens

### Vorlesung Modellierung WS 2011/12 / Folie 259d

**Ziele:**

Beweis konstruieren

**in der Vorlesung:**

Erläuterungen dazu

- Ausgehen von Voraussetzungen und Behauptung.
- Behauptung vereinfachen, zerlegen, transformieren.
- Definitionen zu gültigen Aussagen hinzunehmen.
- Weitere gültige Aussagen ableiten.
- Beweis ausformulieren.

## Konstruktionshilfen am Beispiel für Beweis 2x.3

**gültige Aussagen:**

$R \in Pow(M \times M)$

$a\,R\,b \wedge b\,R\,a \wedge a \neq b$ (wg. Implik. in Beh.)

R nicht antisymmetrisch (wg. Def. antisy.)

**Behauptungen:**

~~$a\,R\,b \wedge b\,R\,a \wedge a \neq b \rightarrow (\neg HO \wedge \neg sHO \wedge \neg tO)$~~

~~$\neg HO \wedge \neg sHO \wedge \neg tO$~~

$\neg$ HO (3 Fälle wg. Konjunktion)

$\neg$ sHO

$\neg$ tO

**Beweisstruktur:**

Wir nehmen an, es gelte $Z = (a\,R\,b \wedge b\,R\,a \wedge a \neq b)$

~~Beweis aus Voraussetzung und Z folgt $\neg HO \wedge \neg sHO \wedge \neg tO$~~

Beweis aus Voraussetzung und Z folgt nicht HO

Beweis aus Voraussetzung und Z folgt nicht sHO

Beweis aus Voraussetzung und Z folgt nicht tO

also aus Z folgt (nicht HO und nicht sHO und nicht tO)

© 2011 bei Prof. Dr. Uwe Kastens

### Vorlesung Modellierung WS 2011/12 / Folie 259e

**Ziele:**

Beweis konstruieren

**in der Vorlesung:**

Erläuterungen dazu

- Ausgehen von Voraussetzungen und Behauptung.
- Behauptung vereinfachen, zerlegen, transformieren.
- Definitionen zu gültigen Aussagen hinzunehmen.
- Weitere gültige Aussagen ableiten.
- Beweis ausformulieren.



## Konstruktionshilfen am Beispiel für Beweis 2x.3

**gültige Aussagen:**

$R \in Pow(M \times M)$

$a\,R\,b \wedge b\,R\,a \wedge a \neq b$ (wg. Implik. in Beh.)

R nicht antisymmetrisch (wg. Def. antisy.)

R ist nicht Halbordnung (wg. Def. HO)

**Behauptungen:**

~~$a\,R\,b \wedge b\,R\,a \wedge a \neq b \rightarrow (\neg HO \wedge \neg sHO \wedge \neg tO)$~~

~~$\neg HO \wedge \neg sHO \wedge \neg tO$~~

~~$\neg$ HO (3 Fälle wg. Konjunktion)~~

$\neg$ sHO

$\neg$ tO

**Beweisstruktur:**

Wir nehmen an, es gelte $Z = (a\,R\,b \wedge b\,R\,a \wedge a \neq b)$

~~Beweis aus Voraussetzung und Z folgt $\neg HO \wedge \neg sHO \wedge \neg tO$~~

Beweis aus Voraussetzung und Z folgt nicht HO

Beweis aus Voraussetzung und Z folgt nicht sHO

Beweis aus Voraussetzung und Z folgt nicht tO

also aus Z folgt (nicht HO und nicht sHO und nicht tO)

© 2011 bei Prof. Dr. Uwe Kastens

### Vorlesung Modellierung WS 2011/12 / Folie 259f

**Ziele:**

Beweis konstruieren

**in der Vorlesung:**

Erläuterungen dazu

- Ausgehen von Voraussetzungen und Behauptung.
- Behauptung vereinfachen, zerlegen, transformieren.
- Definitionen zu gültigen Aussagen hinzunehmen.
- Weitere gültige Aussagen ableiten.
- Beweis ausformulieren.

Mod-2.59g

## Konstruktionshilfen am Beispiel für Beweis 2x.3

**gültige Aussagen:**

$R \in Pow(M \times M)$

$a\,R\,b \wedge b\,R\,a \wedge a \neq b$ (wg. Implik. in Beh.)

R nicht antisymmetrisch (wg. Def. antisy.)

R ist nicht Halbordnung (wg. Def. HO)

R ist nicht totale Ordnung (wg. Def. tO.)

**Behauptungen:**

~~$a\,R\,b \wedge b\,R\,a \wedge a \neq b \rightarrow (\neg HO \wedge \neg sHO \wedge \neg tO)$~~

~~$\neg HO \wedge \neg sHO \wedge \neg tO$~~

~~$\neg HO$~~ (3 Fälle wg. Konjunktion)

$\neg sHO$

~~$\neg tO$~~

**Beweisstruktur:**

Wir nehmen an, es gelte $Z = (a\,R\,b \wedge b\,R\,a \wedge a \neq b)$

~~Beweis aus Voraussetzung und Z folgt $\neg HO \wedge \neg sHO \wedge \neg tO$~~

Beweis aus Voraussetzung und Z folgt nicht HO

Beweis aus Voraussetzung und Z folgt nicht sHO

Beweis aus Voraussetzung und Z folgt nicht tO

also aus Z folgt (nicht HO und nicht sHO und nicht tO)

© 2011 bei Prof. Dr. Uwe Kastens

### Vorlesung Modellierung WS 2011/12 / Folie 259g

**Ziele:**

Beweis konstruieren

**in der Vorlesung:**

Erläuterungen dazu

- Ausgehen von Voraussetzungen und Behauptung.
- Behauptung vereinfachen, zerlegen, transformieren.
- Definitionen zu gültigen Aussagen hinzunehmen.
- Weitere gültige Aussagen ableiten.
- Beweis ausformulieren.

Mod-2.59h

## Konstruktionshilfen am Beispiel für Beweis 2x.3

**gültige Aussagen:**

$R \in Pow(M \times M)$

$a\,R\,b \wedge b\,R\,a \wedge a \neq b$ (wg. Implik. in Beh.)

R nicht antisymmetrisch (wg. Def. antisy.)

R ist nicht Halbordnung (wg. Def. HO)

R ist nicht totale Ordnung (wg. Def. tO.)

nicht sHO wird separat bewiesen (2x.4)

**Behauptungen:**

~~$a\,R\,b \wedge b\,R\,a \wedge a \neq b \rightarrow (\neg HO \wedge \neg sHO \wedge \neg tO)$~~

~~$\neg HO \wedge \neg sHO \wedge \neg tO$~~

~~$\neg HO$~~ (3 Fälle wg. Konjunktion)

~~$\neg sHO$~~

~~$\neg tO$~~

**Beweisstruktur:**

Wir nehmen an, es gelte $Z = (a\,R\,b \wedge b\,R\,a \wedge a \neq b)$

~~Beweis aus Voraussetzung und Z folgt $\neg HO \wedge \neg sHO \wedge \neg tO$~~

Beweis aus Voraussetzung und Z folgt nicht HO

Beweis aus Voraussetzung und Z folgt nicht sHO

Beweis aus Voraussetzung und Z folgt nicht tO

also aus Z folgt (nicht HO und nicht sHO und nicht tO)

© 2011 bei Prof. Dr. Uwe Kastens

### Vorlesung Modellierung WS 2011/12 / Folie 259h

**Ziele:**

Beweis konstruieren

**in der Vorlesung:**

Erläuterungen dazu

- Ausgehen von Voraussetzungen und Behauptung.
- Behauptung vereinfachen, zerlegen, transformieren.
- Definitionen zu gültigen Aussagen hinzunehmen.
- Weitere gültige Aussagen ableiten.
- Beweis ausformulieren.

## Konstruktionshilfen am Beispiel für Beweis 2x.3

**gültige Aussagen:**

$R \in Pow(M \times M)$

$a R b \wedge b R a \wedge a \neq b$ (wg. Implik. in Beh.)

R nicht antisymmetrisch (wg. Def. antisy.)

R ist nicht Halbordnung (wg. Def. HO)

R ist nicht totale Ordnung (wg. Def. tO.)

nicht sHO wird separat bewiesen (2x.4)

**Behauptungen:**

~~$a R b \wedge b R a \wedge a \neq b \rightarrow (\neg HO \wedge \neg sHO \wedge \neg tO)$~~

~~$\neg HO \wedge \neg sHO \wedge \neg tO$~~

~~$\neg HO$~~ (3 Fälle wg. Konjunktion)

~~$\neg sHO$~~

~~$\neg tO$~~

**Beweisstruktur:**

Wir nehmen an, es gelte $Z = (a R b \wedge b R a \wedge a \neq b)$

~~Beweis aus Voraussetzung und Z folgt $\neg HO \wedge \neg sHO \wedge \neg tO$~~

Beweis aus Voraussetzung und Z folgt nicht HO

Beweis aus Voraussetzung und Z folgt nicht sHO

Beweis aus Voraussetzung und Z folgt nicht tO

also aus Z folgt (nicht HO und nicht sHO und nicht tO)

abschließend Beweistext zusammensetzen

© 2011 bei Prof. Dr. Uwe Kastens

### Vorlesung Modellierung WS 2011/12 / Folie 259i

**Ziele:**

Beweis konstruieren

**in der Vorlesung:**

Erläuterungen dazu

- Ausgehen von Voraussetzungen und Behauptung.
- Behauptung vereinfachen, zerlegen, transformieren.
- Definitionen zu gültigen Aussagen hinzunehmen.
- Weitere gültige Aussagen ableiten.
- Beweis ausformulieren.



## Methode: Beweis durch Widerspruch

Ein Beweis durch Widerspruch führt häufig zum Ziel, wenn die Behauptung eine Negation ist:

**Satz**: Voraussetzung **V**. Behauptung **nicht P**.

Man nimmt dann die **nicht-negierte Behauptung mit als Voraussetzung** auf und leitet mit Schlussregeln daraus einen Widerspruch her, d.h. eine Aussage, die immer falsch ist, z. B. ($x \in M$ und $x \notin M$).

**Beweis**: Aus **V** und **P** folgt ein **Widerspruch**. Also war die Annahme **P** falsch.
Also gilt **nicht P**. **qed.**

Häufig ist **nicht P** ein geeignetes Ziel für den Widerspruchsbeweis:

**Beweis**: Aus **V** und **P** folgt **nicht P**. Also gilt **(P und nicht P)**.
Also war die Annahme **P** falsch, also gilt **nicht P**. **qed.**

© 2007 bei Prof. Dr. Uwe Kastens

### Vorlesung Modellierung WS 2011/12 / Folie 260

**Ziele:**

Methode Widerspruchsbeweis kennenlernen

**in der Vorlesung:**

Erläuterungen dazu

## Beispiel für Beweis durch Widerspruch

**Satz 2x.4**:
Sei R eine zweistellige Relationen über der Menge M.
Wenn **a R b und b R a mit a ≠ b**, dann ist **R nicht eine strenge Halbordnung**.

**Beweis durch Widerspruch**:
Sei **a R b und b R a mit a ≠ b**.
Wir nehmen an, dass **R eine strenge Halbordnung** ist.
Dann muss R irreflexiv und transitiv sein.
Wegen der Transitivität folgt aus a R b und b R a auch **a R a und b R b**.
**a R a verletzt** jedoch die Definition von **Irreflexivität**.
Also ist die Annahme, dass R eine **strenge Halbordnung ist, falsch**.
Also ist **R nicht eine strenge Halbordnung**. **qed.**

© 2010 bei Prof. Dr. Uwe Kastens

## Vorlesung Modellierung WS 2011/12 / Folie 261

**Ziele:**
Methode Widerspruchsbeweis anwenden

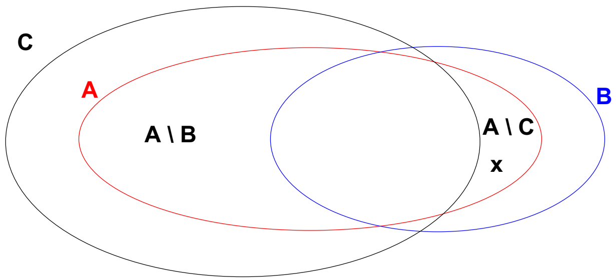
**in der Vorlesung:**
Erläuterungen dazu



## Satz 2x.5 zur Konstruktion eines Widerspruchsbeweises

**Satz 2x.5:**

**A, B, C seien Mengen mit** A \ B ⊆ C. **Dann gilt:**
Aus x ∈ A \ C folgt x ∈ B.




© 2010 bei Prof. Dr. Uwe Kastens

## Vorlesung Modellierung WS 2011/12 / Folie 261a

**Ziele:**
Widerspruchsbeweis schrittweise konstruieren

**in der Vorlesung:**
Erläuterungen dazu

- Ausgehen von Voraussetzungen und Behauptung.
- Implikation zerlegen.
- Behauptung negieren und zum Widerspruch führen
- Beweis ausformulieren.

Mod-2.61b

## Konstruktion eines Widerspruchsbeweises 2x.5

**gültige Aussagen:**
A, B, C Mengen
$A \setminus B \subseteq C$

**Behauptungen:**
$x \in A \setminus C \rightarrow x \in B$

**Beweisstruktur:**
Für die Mengen A, B, C gilt $A \setminus B \subseteq C$.

© 2010 bei Prof. Dr. Uwe Kastens

### Vorlesung Modellierung WS 2011/12 / Folie 261b

**Ziele:**
Widerspruchsbeweis schrittweise konstruieren

**in der Vorlesung:**
Erläuterungen dazu
- Ausgehen von Voraussetzungen und Behauptung.
- Implikation zerlegen.
- Behauptung negieren und zum Widerspruch führen
- Beweis ausformulieren.

Mod-2.61c

## Konstruktion eines Widerspruchsbeweises 2x.5

**gültige Aussagen:**
A, B, C Mengen
$A \setminus B \subseteq C$
(es gibt ein $x \in A \setminus C$)

**Behauptungen:**
$x \in A \setminus C \rightarrow x \in B$ Implikation
$x \in B$

**Beweisstruktur:**
Für die Mengen A, B, C gilt $A \setminus B \subseteq C$.
Es gibt ein $x \in A \setminus C$.
Beweise $x \in B$.

© 2010 bei Prof. Dr. Uwe Kastens

### Vorlesung Modellierung WS 2011/12 / Folie 261c

**Ziele:**
Widerspruchsbeweis schrittweise konstruieren

**in der Vorlesung:**
Erläuterungen dazu
- Ausgehen von Voraussetzungen und Behauptung.
- Implikation zerlegen.
- Behauptung negieren und zum Widerspruch führen
- Beweis ausformulieren.

# Konstruktion eines Widerspruchsbeweises 2x.5

**gültige Aussagen:**

A, B, C Mengen
$A \setminus B \subseteq C$
(es gibt ein $x \in A \setminus C$)
$x \notin B$

**Behauptungen:**

$x \in A \setminus C \rightarrow x \in B$ Implikation
$x \in B$ zeige Widerspruch welchen?

**Beweisstruktur:**

Für die Mengen A, B, C gilt $A \setminus B \subseteq C$.
Es gibt ein $x \in A \setminus C$.
Beweise $x \in B$.
Wir nehmen an $x \notin B$ und zeigen einen Widerspruch:

© 2010 bei Prof. Dr. Uwe Kastens

## Vorlesung Modellierung WS 2011/12 / Folie 261d

**Ziele:**

Widerspruchsbeweis schrittweise konstruieren

**in der Vorlesung:**

Erläuterungen dazu

- Ausgehen von Voraussetzungen und Behauptung.
- Implikation zerlegen.
- Behauptung negieren und zum Widerspruch führen
- Beweis ausformulieren.



# Konstruktion eines Widerspruchsbeweises 2x.5

**gültige Aussagen:**

A, B, C Mengen
$A \setminus B \subseteq C$
(es gibt ein $x \in A \setminus C$) Def. \
$x \notin B$
$x \in A$
$x \notin C$

**Behauptungen:**

$x \in A \setminus C \rightarrow x \in B$ Implikation
$x \in B$ zeige Widerspruch welchen?

**Beweisstruktur:**

Für die Mengen A, B, C gilt $A \setminus B \subseteq C$.
Es gibt ein $x \in A \setminus C$.
Beweise $x \in B$.
Wir nehmen an $x \notin B$ und zeigen einen Widerspruch:
Wegen $x \in A \setminus C$ gilt $x \in A$ und $x \notin C$.

© 2010 bei Prof. Dr. Uwe Kastens

## Vorlesung Modellierung WS 2011/12 / Folie 261e

**Ziele:**

Widerspruchsbeweis schrittweise konstruieren

**in der Vorlesung:**

Erläuterungen dazu

- Ausgehen von Voraussetzungen und Behauptung.
- Implikation zerlegen.
- Behauptung negieren und zum Widerspruch führen
- Beweis ausformulieren.

# Konstruktion eines Widerspruchsbeweises 2x.5

**gültige Aussagen:**

A, B, C Mengen
$A \setminus B \subseteq C$
(es gibt ein $x \in A \setminus C$)
$x \notin B$
$x \in A$
$x \notin C$
$x \in C$ Widerspruch!

Def. \

**Behauptungen:**

$x \in A \setminus C \rightarrow x \in B$ — Implikation
$x \in B$ — zeige Widerspruch welchen?

**Beweisstruktur:**

Für die Mengen A, B, C gilt $A \setminus B \subseteq C$.
Es gibt ein $x \in A \setminus C$.
Beweise $x \in B$.
Wir nehmen an $x \notin B$ und zeigen einen Widerspruch:
Wegen $x \in A \setminus C$ gilt $x \in A$ und $x \notin C$.
Wegen $A \setminus B \subseteq C$ und $x \notin B$ und $x \in A$ gilt $x \in C$.
Das ist ein Widerspruch.

© 2010 bei Prof. Dr. Uwe Kastens

## Vorlesung Modellierung WS 2011/12 / Folie 261f

**Ziele:**

Widerspruchsbeweis schrittweise konstruieren

**in der Vorlesung:**

Erläuterungen dazu

- Ausgehen von Voraussetzungen und Behauptung.
- Implikation zerlegen.
- Behauptung negieren und zum Widerspruch führen
- Beweis ausformulieren.



# Konstruktion eines Widerspruchsbeweises 2x.5

**gültige Aussagen:**

A, B, C Mengen
$A \setminus B \subseteq C$
(es gibt ein $x \in A \setminus C$)
$x \notin B$
$x \in A$
$x \notin C$
$x \in C$ Widerspruch!

Def. \

**Behauptungen:**

$x \in A \setminus C \rightarrow x \in B$ — Implikation
$x \in B$ — zeige Widerspruch welchen?

**Beweisstruktur:**

Für die Mengen A, B, C gilt $A \setminus B \subseteq C$.
Es gibt ein $x \in A \setminus C$.
Beweise $x \in B$.
Wir nehmen an $x \notin B$ und zeigen einen Widerspruch:
Wegen $x \in A \setminus C$ gilt $x \in A$ und $x \notin C$.
Wegen $A \setminus B \subseteq C$ und $x \notin B$ und $x \in A$ gilt $x \in C$.
Das ist ein Widerspruch.
Also ist die Annahme $x \notin B$ falsch; es gilt $x \in B$.
Also, für Mengen A, B, C mit $A \setminus B \subseteq C$ gilt: Aus $x \in A \setminus C$ folgt $x \in B$. **q.e.d.**

© 2010 bei Prof. Dr. Uwe Kastens

## Vorlesung Modellierung WS 2011/12 / Folie 261i

**Ziele:**

Widerspruchsbeweis schrittweise konstruieren

**in der Vorlesung:**

Erläuterungen dazu

- Ausgehen von Voraussetzungen und Behauptung.
- Implikation zerlegen.
- Behauptung negieren und zum Widerspruch führen
- Beweis ausformulieren.

## Unendlich viele Primzahlen

**Satz 2x.6:** Es gibt **unendlich viele Primzahlen**.

**Beweis durch Widerspruch (nach Euclid) 2x.6:**
Wir nehmen an, dass es **endlich viele Primzahlen** gibt, nämlich $\mathbf{p_1, p_2, ..., p_n}$.
Sei $\mathbf{m = p_1 p_2 ... p_n + 1}$.
m ist nicht durch $p_1$ teilbar, denn m dividiert durch $p_1$ ergibt $p_2...p_n$ mit Rest 1. Aus demselben Grund ist m nicht durch $p_2, ..., p_n$ teilbar.
Wir verwenden nun die Tatsache, dass jede natürliche Zahl, die größer als 1 ist, entweder **eine Primzahl** ist oder als **Produkt von Primzahlen** geschrieben werden kann. m ist größer als 1, also ist m entweder eine Primzahl oder m ist ein Produkt von Primzahlen.

Nehmen wir an, **m ist eine Primzahl**. m ist größer als jede Zahl $p_1, p_2, ..., p_n$. Also haben wir eine weitere Primzahl gefunden. Das **widerspricht** der Annahme, dass $p_1, p_2, ..., p_n$ **alle** Primzahlen sind.

Nehmen wir nun an, dass **m ein Produkt von Primzahlen** ist. Sei q eine dieser Primzahlen. Dann ist q ein Teiler von m. Da $p_1, p_2, ..., p_n$ nicht Teiler von m sind, haben wir eine weitere Primzahl gefunden. Das ist wie oben ein **Widerspruch**.

Die Annahme, dass es endlich viele Primzahlen gibt, hat zum **Widerspruch** geführt.
Also gibt es unendlich viele Primzahlen. **qed.**

© 2011 bei Prof. Dr. Uwe Kastens

### Vorlesung Modellierung WS 2011/12 / Folie 262

**Ziele:**
Beweisstruktur verstehen

**in der Vorlesung:**
- Voraussetzungen und Behauptung des Satzes identifizieren.
- Negation der Behauptung als Annahme.
- Tatsache über Primzahlen als weitere Voraussetzung verwenden.
- Oder in der Voraussetzung führt zu Fallunterscheidung.
- Jeder Fall wird einzeln zum Widerspruch geführt.



## Methode: Beweis durch Induktion

Beweise durch Induktion sind geeignet für Aussagen der Form

**Für alle n** $\in \mathbb{N}_0$ **gilt P (n)** .

**Ein Beweis durch Induktion hat folgende Struktur:**

**Induktionsanfang**:Beweis von **P (0)** .

**Induktionsschritt**:Sei n $\in \mathbb{N}_0$ beliebig aber fest.
Beweis von **Aus P (n) folgt P (n+1)**. **qed.**

Manchmal reicht im Beweis des Induktionsschrittes P (n) als Vorbedingung nicht aus.
Dann kann man in der folgenden Variante P (0), P (1), ..., P (n) verwenden:

**Variante** des Induktionsbeweises:

Induktionsanfang: Beweis von **P (0)** .

Induktionsschritt: Sei n $\in \mathbb{N}_0$ beliebig aber fest.
Beweis von **Aus [P (0), P (1), ..., P (n)] folgt P (n+1)**. **qed.**

Zum Beweis von Aussagen der Form **Für alle n** $\in \mathbb{N}_0$ **, n** $\geq$ **k gilt P (n)** beginnt man im Induktionsanfang mit **P (k) statt P (0)**.

Statt *Beweis durch Induktion* sagt man auch *Beweis durch vollständige Induktion*.

© 2011 bei Prof. Dr. Uwe Kastens

### Vorlesung Modellierung WS 2011/12 / Folie 263

**Ziele:**
Beweismethode Induktion verstehen

**in der Vorlesung:**
- Struktur erklären.

## Beispiel für Beweis durch Induktion

**Satz 2x.7**:

**Für alle n $\in \mathbb{N}_0$ gilt $2^0 + 2^1 + ... + 2^n = 2^{n+1} - 1$.**

**Beweis durch Induktion:**

**Induktionsanfang**:

Für n = 0 gilt $2^0 = 1 = 2^1 - 1$.

**Induktionsschritt**:

Sei n $\in \mathbb{N}_0$ beliebig aber fest und

sei $\mathbf{2^0 + 2^1 + ... + 2^n = 2^{n+1} - 1}$. Dann ist

$$2^0 + 2^1 + ... + 2^n + 2^{n+1} = (2^0 + 2^1 + ... + 2^n) + 2^{n+1}$$
$$= (2^{n+1} - 1) + 2^{n+1}$$
$$= 2 * 2^{n+1} - 1$$
$$= 2^{n+2} - 1 \qquad \textbf{qed.}$$

© 2011 bei Prof. Dr. Uwe Kastens

### Vorlesung Modellierung WS 2011/12 / Folie 264

**Ziele:**

Beispiel zur Beweismethode Induktion

**in der Vorlesung:**

- Beispiel nachvollziehen.



## Zusammenfassung

**Satzform: Voraussetzungen V. Behauptung B.**

**Beweismethoden:**

**Direkter Beweis**:
Aus **V** und bewiesenen Tatsachen mit Schlussregeln **B** nachweisen.

**Widerspruchsbeweis**:
*Nicht* **B** annehmen. Aus **V** *und nicht* **B** einen Widerspruch ableiten. Also gilt **B**.

**Induktionsbeweis** von Behauptung B = **Für alle n $\in \mathbb{N}_0$ gilt P (n):**
Induktionsanfang: Beweis von P (0),
Induktionsschritt: Beweis von Aus P (n) folgt P (n+1)

**Techniken:**

**Fallunterscheidung** bei **Sonderfällen**, $V_1$ ***oder*** $V_2$, $B_1$ ***und*** $B_2$

Wenn B = P ***impliziert*** Q, dann aus V *und* P die Behauptung Q folgern.

Viele weitere Strategien, Techniken und Beispiele im Buch von Velleman, z.B.

Wenn B = P ***impliziert*** Q, dann aus V *und nicht* Q die Behauptung *nicht* P folgern.

© 2011 bei Prof. Dr. Uwe Kastens

### Vorlesung Modellierung WS 2011/12 / Folie 265

**Ziele:**

Methoden und Techniken anwenden können

**in der Vorlesung:**

Zum Üben ermuntern.