Prof. Dr. Uwe Kastens
Institut für Informatik, Fakultät für Elektrotechnik, Informatik und Mathematik, Universität Paderborn

Modellierung WS 2011/2012 — Lösung zum Übungsblatt 9

Lösung 1: Verifikation von Schleifen

Einsetzen der vorgegebenen Aussagen ergibt:

$a := 1;$
$i := 1;$
$\{a = 1 \wedge i = 1\}$
solange $(i < n)$ **wiederhole**
  $\{i > 0 \wedge a > 0 \wedge i \leq n \wedge a = i! \wedge i < n\}$
  $i := i + 1;$
  $a := a * i;$
  $\{i > 0 \wedge a > 0 \wedge i \leq n \wedge a = i!\}$
$\{i > 0 \wedge a > 0 \wedge i \leq n \wedge a = i! \wedge i \geq n\}$

Lösung 2: Verifikation von Schleifen

Der Algorithmus berechnet den Quotienten und den Rest der ganzzahligen Division b/a. Am Ende enthält $t = \lfloor b/a \rfloor$ den ganzzahligen Quotienten und $r = b \bmod a$ den Rest der Division. Die Nachbedingung ist also $\{t = \lfloor b/a \rfloor \wedge r = b \bmod a\}$

Als Schleifeninvariante konstruieren wir INV := $\{r, t \in \mathbb{N}_0 \wedge b = t \cdot a + r\}$
Weil die Variablen a und b durch den Algorithmus nicht verändert werden, gilt die Aussage $\{a, b \in \mathbb{N}_0 \wedge a > 0\}$ der Vorbedingung an allen Stellen.

$\{\} \rightarrow \{0 = 0\}$
$t := 0;$
$\{t = 0\} \rightarrow \{t = 0 \wedge b = b\}$
$r := b;$
$\{t = 0 \wedge r = b\} \rightarrow \{r, t \in \mathbb{N}_0 \wedge b = t \cdot a + r\} = INV$
solange $r \geq a$ **wiederhole**
  $\{r, t \in \mathbb{N}_0 \wedge b = t \cdot a + r \wedge r \geq a\} \rightarrow \{r, t + 1 \in \mathbb{N}_0 \wedge r \geq a \wedge b = (t + 1) \cdot a + r - a\}$
  $t := t + 1;$
  $\{r, t \in \mathbb{N}_0 \wedge r \geq a \wedge b = t \cdot a + r - a\} \rightarrow \{r - a, t \in \mathbb{N}_0 \wedge b = t \cdot a + r - a\}$
  $r := r - a;$
  $\{r, t \in \mathbb{N}_0 \wedge b = t \cdot a + r\}$
$\{r, t \in \mathbb{N}_0 \wedge b = t \cdot a + r \wedge \neg(r \geq a)\} \rightarrow \{t = \lfloor b/a \rfloor \wedge r = b \bmod a\}$

Lösung 3: Terminierung

(a) Der Algorithmus aus Aufgabe 2 terminiert. Der Ausdruck r ist ganzzahlig und fällt streng streng monoton, weil $a > 0$ gilt. Der Ausdruck ist außerdem durch 0 nach unten beschränkt, weil $r \in \mathbb{N}_0$ eine Invariante der Schleife ist.

(b) Der Ausdruck $a + b$ ist ganzzahlig und fällt streng monoton. Bei jedem Schleifendurchlauf wird entweder a oder b um eins verringert. Der Ausdruck ist außerdem durch 0 nach unten beschränkt, weil $\{a, b \in \mathbb{N}_0\}$ eine Invariante der Schleife ist.

Lösung 4: Repräsentation von Graphen

(a)

$$
\begin{aligned}
G_1 &= (V_1, E_1)\\
V_1 &= \{a, b, c, d\}\\
E_1 &= \{\{a, d\}, \{c, d\}, \{c\}\}\\
G_2 &= (V_2, E_2)\\
V_2 &= \{a, b, c, d\}\\
E_2 &= \{(a, b), (b, a), (d, b), (c, d), (c, c)\}
\end{aligned}
$$

(b) Adjazenzmatrix für G_1:

	a	b	c	d
a	f	f	f	w
b	f	f	f	f
c	f	f	w	w
d	w	f	w	f

Adjazenzlisten für G_1:

a	(d)
b	()
c	(c,d)
d	(a,c)

Adjazenzmatrix für G_2:

	a	b	c	d
a	f	w	f	f
b	w	f	f	f
c	f	f	w	w
d	f	w	f	f

Adjazenzlisten für G_2:

a	(b)
b	(a)
c	(c,d)
d	(b)

(c) Der Grad von Graph G_1 ist 2, der Grad von G_2 ist 3.

(d) Die Kantenmengen E' des durch $V' = \{a, b, c\}$ induzierten Teilgraphen $G' = (V', E')$:

$$
\begin{aligned}
E'_1 &= \{\{c\}\}\\
E'_2 &= \{(a, b), (b, a), (c, c)\}
\end{aligned}
$$