Prof. Dr. Uwe Kastens
Institut für Informatik, Fakultät für Elektrotechnik, Informatik und Mathematik, Universität Paderborn

Modellierung WS 2011/2012 — Lösung zum Übungsblatt 8

Lösung 1: Fehlerhafte Negation

Nach der Definition der Interpretation prädikatenlogischer Formeln (Mod-4.31) gilt:

$$\Im(\neg\,\alpha) = w\ gdw.\ \Im(\alpha) = f$$

insbesondere also

$$\Im(\alpha) = f \rightarrow \Im(\neg\alpha) = w$$

Wir betrachten ein Universum U von 2 oder mehr Studierenden. Wir nehmen an, dass alle außer einem davon in die Vorlesung gehen.
Dann ist

$$\Im(Alle\ gehen\ in\ die\ Vorlesung) = f$$

Allerdings gilt ebenfalls

$$\Im(Niemand\ geht\ in\ die\ Vorlesung) = f$$

Dies ist also nicht die korrekte Negation.

Lösung 2: Äquivalenz prädikatenlogischer Formeln

(a) $\forall x\ schön(x) \wedge \exists x\ reich(x) \equiv \forall x\ \exists x_1\ (schön(x) \wedge reich(x_1))$

	$\forall x\ schön(x) \wedge \exists x\ reich(x)$	(Umbenennung)
$\equiv$	$\forall x\ schön(x) \wedge \exists x_1\ reich(x_1)$	(Wirkungsbereich des Quantors ausweiten)
$\equiv$	$\forall x\ (schön(x) \wedge \exists x_1\ reich(x_1))$	(Wirkungsbereich des Quantors ausweiten)
$\equiv$	$\forall x\ (\exists x_1\ (schön(x) \wedge reich(x_1)))$	(Klammerung weglassen)
$\equiv$	$\forall x\ \exists x_1\ (schön(x) \wedge reich(x_1))$	

(b) $\exists x\ klein(x) \wedge \forall y\ schnell(z) \wedge \forall y\ schnell(y) \equiv \exists x\ \forall y\ (klein(x) \wedge schnell(z) \wedge schnell(y))$

	$\exists x\ klein(x) \wedge \forall y\ schnell(z) \wedge \forall y\ schnell(y)$	(Quantor eliminieren)
$\equiv$	$\exists x\ klein(x) \wedge schnell(z) \wedge \forall y\ schnell(y)$	(Wirkungsbereich des Quantors ausweiten)
$\equiv$	$\exists x\ (klein(x) \wedge schnell(z) \wedge \forall y\ schnell(y))$	(Wirkungsbereich des Quantors ausweiten)
$\equiv$	$\exists x\ (\forall y\ ((klein(x) \wedge schnell(z) \wedge schnell(y))))$	(Klammern eliminieren)
$\equiv$	$\exists x\ \forall y\ (klein(x) \wedge schnell(z) \wedge schnell(y))$	

Lösung 3: Normalformen prädikatenlogischer Formeln

(a) Negationsnormalform NNF

(1) Eine prädikatenlogische Formel ist in NNF genau dann, wenn jedes Negationszeichen in α unmittelbar vor einer Primformel steht und sie die Junktoren $\rightarrow$ und $\leftrightarrow$ nicht enthält.

(2)

	$\neg\exists x\ (\forall y P(x,y) \vee \exists x Q(w,x))$	((d) Negation von Quantorformel)
$\equiv$	$\forall x\ \neg(\forall y P(x,y) \vee \exists x Q(w,x))$	((b) De Morgan)
$\equiv$	$\forall x\ (\neg\forall y P(x,y) \wedge \neg\exists x Q(w,x))$	((e) Negation von Quantorformel)
$\equiv$	$\forall x\ (\exists y\ \neg P(x,y) \wedge \neg\exists x Q(w,x))$	((d) Negation von Quantorformel)
$\equiv$	$\forall x\ (\exists y\ \neg P(x,y) \wedge \forall x \neg Q(w,x))$	

(b) Pränexe Normalform PNF

(1) Eine prädikatenlogische Formel ist in PNF genau dann, wenn sie von der Form $Q_1x_1Q_2x_2...Q_nx_n\beta$ ist, wobei die Q_i Quantoren sind und β keine Quantoren enthält.

(2)

	$\forall x\ (\exists y\ \neg P(x,y) \wedge \forall x \neg Q(w,x))$	(Konsistente Umbennennung)
$\equiv$	$\forall x\ (\exists y\ \neg P(x,y) \wedge \forall z \neg Q(w,z))$	(Wirkungsbereich des Quantors ausweiten)
$\equiv$	$\forall x\ (\exists y\ (\neg P(x,y) \wedge \forall z \neg Q(w,z)))$	(Wirkungsbereich des Quantors ausweiten)
$\equiv$	$\forall x\ (\exists y\ (\forall z\ (\neg P(x,y) \wedge \neg Q(w,z))))$	(Klammern eliminieren)
$\equiv$	$\forall x\ \exists y\ \forall z\ (\neg P(x,y) \wedge \neg Q(w,z))$	

Lösung 4: Hoare-Kalkül

(a) $\{y = a \wedge x = a/4\} \Rightarrow \{y = a \wedge 4x - y = 0\}$

`x := 4x - y`

$\{y = a \wedge x = 0\} \Rightarrow \{x + y - x = a \wedge x + y = a\}$

`y := x + y`

$\{y - x = a \wedge y = a\}$

`x := y - x`

$\{x = a \wedge y = a\}$

(b) $\{x = 5 \wedge y = 3\} \Rightarrow \{x \cdot y = 15 \wedge y = 3\}$

`x := x * y`

$\{x = 15 \wedge y = 3\}$

(c) $\{x = -1 \wedge y = 3 \wedge x < 0\} \Rightarrow \{y - x = 4 \wedge y = 3 \wedge y < y - x\}$

`x := y - x`

$\{x = 4 \wedge y = 3 \wedge y < x\}$

(d) $\{x \leq y\} \Rightarrow \{x - y \leq 0\}$

`x := x - y`

$\{x \leq 0\} \Rightarrow \{x + 1 \leq 1\}$

`x := x + 1`

$\{x \leq 1\}$