Prof. Dr. Uwe Kastens
Institut für Informatik, Fakultät für Elektrotechnik, Informatik und Mathematik, Universität Paderborn

Modellierung WS 2011/2012 — Lösung zum Übungsblatt 7

Lösung 1: Prädikatenlogische Aussagen formalisieren

(a) Wir verwenden folgende Prädikate:

- $S(x)$ bedeutet, dass x ein Studierender ist.
- $V(x)$ bedeutet, dass x eine Vorlesung ist.
- $BV(s, v)$ bedeutet, dass der Studierende s die Vorlesung v besucht.
- $BK(s, v)$ bedeutet, dass der Studierende s die Klausur zur Vorlesung v besteht.

(1) In jeder Vorlesung gibt es einen Studierenden, der die Vorlesung besucht aber die Klausur nicht besteht.

$$\forall v(V(v) \rightarrow \exists s(S(s) \wedge BV(s,v) \wedge \neg BK(s,v)))$$

(2) Es gibt zwei Studierende, die genau die gleichen Vorlesungen besuchen.

$$\exists s \exists t(S(s) \wedge S(t) \wedge \neg(s = t) \wedge \forall v(V(v) \rightarrow (BV(s,v) \leftrightarrow BV(t,v))))$$

(3) Jede Vorlesung wird von mindestens zwei Studierenden besucht.

$$\forall v(V(v) \rightarrow \exists s \exists t(S(s) \wedge S(t) \wedge BV(s,v) \ \wedge BV(t,v) \ \wedge \neg(s = t)))$$

(4) Es gibt Studierende, die bestehen die Klausuren zu allen Vorlesungen, die sie besuchen.

$$\exists s(S(s) \wedge (\forall v(V(v) \rightarrow (BV(s,v) \rightarrow BK(s,v)))))$$

(b) Wir vereinbaren folgende Prädikate:

- $Q(x)$ bedeutet, dass x eine rationale Zahl ist.
- $R(x)$ bedeutet, dass x eine reelle Zahl ist.
- $GE(x)$ bedeutet, dass x größer als der Eiffelturm ist.

(1) Jede rationale Zahl ist eine reelle Zahl.

$$\forall x(Q(x) \rightarrow R(x))$$

(2) Manche reelle Zahl ist eine rationale Zahl.

$$\exists x(R(x) \wedge Q(x))$$

(3) Nicht jede reelle Zahl ist eine rationale Zahl.

$$\neg \forall x(R(x) \rightarrow Q(x))$$

(4) Keine reelle Zahl ist größer als der Eiffelturm.

$$\neg \exists x(R(x) \wedge GE(x))$$

Lösung 2: Syntaktisch korrekte PL-Formeln

(a) $P(d) \rightarrow \forall a \exists b(\neg R(a, P(b)))$

In Anwendungen von Prädikaten dürfen nur Terme der Termalgebra auftreten. Daher ist die Prädikatanwendung $P(b)$ innerhalb der Anwendung des Prädikats R nicht korrekt.

(b) $\exists x(\forall y(S(y, y)) \vee S(y, x) = y)$

Vergleiche sind nur zwischen Termen der Termalgebra zulässig. Die Verwendung von $S(y, x)$ im Vergleich ist also nicht korrekt.

(c) $\forall s(\exists t(P(s) \wedge t(s)))$

In der Prädikatenlogik erster Stufe sind quantifizierte Variablen nur als Operanden in Termen erlaubt. Die quantifizierte Variable t darf also nicht für ein Prädikat verwendet werden.

(a) $\exists x(P(x,y) \vee \forall y P(x,y))$

(b) $\forall x \exists y(P(x,y)) \wedge \forall x P(x,y)$

(c) $\forall x \forall y((Q(x) \rightarrow \exists x(S(x,y,z))) \rightarrow R(x,y))$

Abbildung 1: Freie und gebundene Variablen

Lösung 3: Freie und gebundene Variablen

- *Freie* Vorkommen der Variablen sind mit Pfeilen gekennzeichnet.
- *Gebundene* Vorkommen der Variablen sind durch Linien mit dem zugehörigen Quantor verbunden.

Lösung 4: Interpretation prädikatenlogischer Formeln

$$\begin{array}{lll}
 & & \Im(\forall x\ (P(x,A) \rightarrow P(x,B))) \\
\text{(Def. Impl.)} & = & \Im(\forall x\ (\neg P(x,A) \vee P(x,B))) \\
(6) & = & Für\ alle\ d \in U gilt : \Im_{[x/d]}(\neg P(x,A) \vee P(x,B)) \\
(5) & = & Für\ alle\ d \in U gilt : \Im_{[x/d]}(\neg P(x,A))\ oder\ \Im_{[x/d]}(P(x,B)) \\
(3) & = & Für\ alle\ d \in U gilt : \Im_{[x/d]}(P(x,A)) = f\ oder\ \Im_{[x/d]}(P(x,B)) \\
(1) & = & Für\ alle\ d \in U gilt : (\Im_{[x/d]}(x), \Im_{[x/d]}(A)) \in \Im_{[x/d]}(P) = f\ oder (\Im_{[x/d]}(x), \Im_{[x/d]}(B)) \in \Im_{[x/d]}(P) \\
(\Im) & = & Für\ alle\ d \in U gilt : (d, \{1,2,5\}) \in \Im(P) = f\ oder\ (d, \{1,2,3,5\}) \in \Im(P) \\
(s.Tafel) & = & w
\end{array}$$

d	P(d, {1,2,5})	P(d,{1,2,3,5})	P(d,{1,2,3,5}) = f und P(d,{1,2,3,5})
1	w	w	w
2	w	w	w
3	f	w	w
5	w	w	w
sonst	f	f	w

Abbildung 2: Wahrheitstafel zu Aufg. 4

Lösung 5: Arbeiten mit Interpretationen

Wir zeigen

$\forall x \exists y\ (P(x,y))$ und $\exists y \forall x\ (P(x,y))$

sind nicht äquivalent durch ein Gegenbeispiel:

Grundbereich $U = \{mo, di, mi\}$

$\Im(P) = \{(mo,di),(di,mi),(mi,mi)\}$

Es gilt dann $\Im(\forall x \exists y(P(x,y))) = w$, aber $\Im(\exists y \forall x(P(x,y))) = f$.