Prof. Dr. Uwe Kastens
Institut für Informatik, Fakultät für Elektrotechnik, Informatik und Mathematik, Universität Paderborn

Modellierung WS 2011/2012 — Lösung zum Übungsblatt 6

Lösung 1: Begriffe der Aussagenlogik

(a) Was versteht man unter der *Syntax der Aussagenlogik*?

Unter *Syntax der Aussagenlogik* versteht man die Definition der Struktur der aussagenlogischen Formeln. (Folie 4.4)

(b) Erläutern Sie den Begriff *Interpretation einer Formel*

Ausgehend von einer *Belegung*, die den vorkommenden Variablen Wahrheitswerte zuordnet, definieren wir die *Interpretation* $\Im$ wie folgt:

- Für Variable ist die Interpretation durch die Belegung definiert
- Für zusammengesetzte Formeln definiert man die Interpretation durch Wahrheitstafeln für die Junktoren der Aussagenlogik (Folie 4.5)

(c) Was ist ein *logischer Schluss*?

Sei A eine Menge von Formeln, F eine Formel. Wenn für alle Interpretationen, die alle Formeln in A erfüllen, auch $\Im(F)$ gilt, nennen wir

$$A \models F$$

("F folgt semantisch aus A") einen *logischen Schluss*.

Lösung 2: Formalisierung von Aussagen

- Wenn die Vorlesung stattfindet, dann gehe ich nicht in die Mensa.

$$vo \rightarrow \neg me$$

- Wenn heute Montag ist oder heute Freitag ist, dann findet die Vorlesung statt.

$$mo \vee fr \rightarrow vo$$

- Ich gehe in die Mensa, nur wenn die Vorlesung stattfindet.

$$me \rightarrow vo$$

- Wenn die Vorlesung stattfindet und heute nicht Freitag ist, dann ist heute Montag.

$$vo \wedge \neg fr \rightarrow mo$$

Lösung 3: Wahrheitstafeln für logische Aussagen

(a) Formalisierung der drei Aussagen:

- Wenn ich mal nicht in der Übung war, bin ich in die Vorlesung gegangen.

$$\neg ue \rightarrow vo$$

- Immer wenn ich in der Übung und in der Vorlesung war, habe ich nicht ins Modellierungsbuch geschaut.

$$ue \wedge vo \rightarrow \neg bu$$

- Wenn ich ins Modellierungsbuch geschaut habe oder nicht in der Übung war, war ich nicht in der Vorlesung.

$$bu \vee \neg ue \rightarrow \neg vo$$

(b) Wahrheitstafel

Interpretation der Teilformeln und Formeln für alle Belegungen der drei Variablen:

ue	vo	bu	$\neg ue$	$\neg ue \rightarrow vo$	$ue \wedge vo$	$\neg bu$	$ue \wedge vo \rightarrow \neg bu$	$bu \vee \neg ue$	$\neg vo$	$bu \vee \neg ue \rightarrow \neg vo$
f	f	f	w	f	f	w	w	w	w	w
f	f	w	w	f	f	f	w	w	w	w
f	w	f	w	w	f	w	w	w	f	f
f	w	w	w	w	f	f	w	w	f	f
w	f	f	f	**w**	f	w	**w**	f	w	**w**
w	f	w	f	**w**	f	f	**w**	w	w	**w**
w	w	f	f	**w**	w	w	**w**	f	f	**w**
w	w	w	f	w	w	f	f	w	f	f

(c) Eine einfachere Formulierung: “Ich war immer in der Übung und nie habe ich sowohl die Vorlesung besucht als auch ins Buch geschaut.”

Als Formel:

$$ue \wedge \neg(vo \wedge bu)$$

Lösung 4: Erfüllbarkeit von Formeln

(a) (1) $a \rightarrow (a \rightarrow b)$

$\Im(a)$	$\Im(b)$	$\Im(a \rightarrow b)$	$\Im(a \rightarrow (a \rightarrow b))$
w	w	w	w
w	f	f	f
f	w	w	w
f	f	w	w

Die Formel ist weder unerfüllbar noch allgemeingültig.

(2) $a \rightarrow (b \rightarrow a)$

$\Im(a)$	$\Im(b)$	$\Im(b \rightarrow a)$	$\Im(a \rightarrow (b \rightarrow a))$
w	w	w	w
w	f	w	w
f	w	f	w
f	f	w	w

Die Formel ist allgemeingültig.

(3) $a \rightarrow (b \wedge c)) \wedge (a \wedge \neg b)$

$\Im(a)$	$\Im(b)$	$\Im(c)$	$\Im(\neg b)$	$\Im(b \wedge c)$	$\Im(a \rightarrow (b \wedge c))$	$\Im(a \wedge \neg b)$	$\Im((a \rightarrow (b \wedge c)) \wedge (a \wedge \neg b))$
w	w	w	f	w	w	f	f
w	w	f	f	f	f	f	f
w	f	w	w	f	f	w	f
w	f	f	w	f	f	w	f
f	w	w	f	w	w	f	f
f	w	f	f	f	w	f	f
f	f	w	w	f	w	f	f
f	f	f	w	f	w	f	f

Die Formel ist unerfüllbar (widerspruchsvoll).

(b) Beweis der Allgemeingültigkeit

Behauptung: $a \to (b \to a)$ allgemeingültig

Beweis:

durch Anwendung der Gesetze der Booleschen Algebra:

$a \to (b \to a)$	Definition der Implikation
$\neg a \vee (b \to a)$	Definition der Implikation
$\neg a \vee (\neg b \vee a)$	Kommutativität
$\neg a \vee (a \vee \neg b)$	Assoziativität
$(\neg a \vee a) \vee \neg b$	Komplement
$true \vee \neg b$	Kommutativität
$\neg b \vee true$	Neutrales Element
$true$	q.e.d.

Lösung 5: Logische Schlüsse

Prüfen aller Interpretationen, die alle Formeln in M erfüllen:

st	ba	kf	$(kf \wedge \neg ba)$	$\neg st$	$\neg ba$	$\neg kf$	$\neg kf \to st$	$ba \to st$	$(kf \wedge \neg ba) \to \neg st$	
w	w	w	f	f	f	f	**w**	**w**	w	
w	w	f	f	f	f	w	**w**	**w**	w	
w	f	w	w	f	w	f	**w**	**w**	**f**	$\triangleleft$
w	f	f	f	f	w	w	**w**	**w**	w	
f	w	w	f	w	f	f	w	f	w	
f	w	f	f	w	f	w	f	f	w	
f	f	w	w	w	w	f	**w**	**w**	w	
f	f	f	f	w	w	w	f	w	w	

Der logische Schluss

$$M \models (kf \wedge \neg ba) \to \neg st$$

ist falsch.

Das konkrete Gegenbeispiel ist $\sigma = [st/\mathrm{w}, ba/\mathrm{f}, kf/\mathrm{w}]$.