Prof. Dr. Uwe Kastens
Institut für Informatik, Fakultät für Elektrotechnik, Informatik und Mathematik, Universität Paderborn

Modellierung WS 2011/2012 — Lösung zum Übungsblatt 3

Lösung 1: Direkter Beweis

Wir zeigen: GBG ist eine Äquivalenzrelation.

Voraussetzungen:

- $G := \{A, AB, B, 0\}$
- TN ist beliebige Menge
- $bg : TN \to G$ ist eine totale Funktion
- $GBG = \{(x, y) \mid x, y \in TN,\ bg(x) = bg(y)\}$

Behauptung:

GBG ist Äquivalenzrelation.

Beweis:

zu zeigen:

a) GBG ist reflexiv
b) GBG ist symmetrisch
c) GBG ist transitiv

d.h.

a) $\forall t \in TN,\ (t, t) \in GBG$
b) $\forall (t_1, t_2) \in TN \times TN,\ (t_1, t_2) \in GBG \Rightarrow\ (t_2, t_1) \in GBG$
c) $(t_1, t_2) \in GBG\ \wedge (t_2, t_3) \Rightarrow\ (t_1, t_3) \in GBG$

zu a)
Jeder hat die gleiche Blutgruppe wie er selbst. Daraus folgt, dass $\forall t \in TN,\ (t, t) \in GBG$

zu b)
Da $(t_1, t_2) \in GBG$ folgt, dass $bg(t_1) = bg(t_2)$. Also ist auch $(t_2, t_1) \in GBG$

zu c)
Da $(t_1, t_2) \in GBG$ und $(t_2, t_3) \in GBG$ folgt, dass $gb(t_1) = bg(t_2) = bg(t_3)$. Also ist auch $(t_1, t_3) \in GBG$

□

Lösung 2: Beweis durch Widerspruch

Voraussetzungen:

$n \in \mathbb{N}$

Behauptung:

$\exists k \in \mathbb{N}\ mit\ k * 3 = n + n + 1 + n + 2.$

Beweis:

Nimm negierte Behauptung in die Voraussetzung auf und leite daraus einen Widerspruch ab:

$n \in \mathbb{N}$ und $\nexists k \in \mathbb{N}\ mit\ k * 3 = n + n + 1 + n + 2 \Rightarrow$

$n \in \mathbb{N}$ und $\nexists k \in \mathbb{N}\ mit\ k * 3 = (n + 1) * 3 \Rightarrow$

$n \in \mathbb{N}$ und $\nexists k \in \mathbb{N}\ mit\ k = (n + 1)$

Das ist ein Widerspruch zur Definition der natürlichen Zahlen.

□

Lösung 3: Prüfen eines Beweises

(a) Voraussetzungen: $A \subseteq C, B \subseteq C$ und $x \in A$

Behauptung: $x \in B$.

(b) Fehler:

Der Schluss "Da $x \notin B$ und $B \subseteq C$ ist, gilt $x \notin C$" ist falsch. Für $B := \{1\},\ C := \{1, 2\},\ x = 2$ ist die Voraussetzung $x \notin B \wedge B \subseteq C$ erfüllt, aber es gilt nicht $x \notin C$.

(c) Gegenbeispiel:

Für $A := \{1\}, B := \{2\}, C := \{1, 2\}, x = 1$ ist die Voraussetzung $A \subseteq C \wedge B \subseteq C \wedge x \in A$ des Theorems erfüllt, aber die Behauptung $x \in B$ ist falsch.

Lösung 4: Strukturierter Beweis

Theorem: Sei $A \cap B = C$. Wenn $A \cup B = C$ und $B = \emptyset$ ist, dann ist auch $A = \emptyset$.

Beweis schrittweise nach dem Schema von Folie Mod-2.59(a-i)!

- Gültige Aussagen: $A \cap B = C$
  Behauptungen:$A \cup B = C$ und $B = \emptyset$ impliziert $A = \emptyset$
- Die Behauptung ist eine Implikation. Die linke Seite der Implikation wird zu den Voraussetzungen hinzugefügt und die rechte Seite als Behauptung bewiesen.
  Gültige Aussagen: $A \cap B = C$, $A \cup B = C$, $B = \emptyset$
  Behauptungen: $A = \emptyset$
- Aus $A \cap B = C$ und $B = \emptyset$ ergibt sich: $C = \emptyset$
  Gültige Aussagen: $A \cap B = C$, $A \cup B = C$, $B = \emptyset$, $C = \emptyset$
  Behauptungen: $A = \emptyset$
- Aus $A \cup B = C$ und $C = \emptyset$ ergibt sich: $A = \emptyset$
  Gültige Aussagen: $A \cap B = C$, $A \cup B = C$, $B = \emptyset$, $C = \emptyset$, $A = \emptyset$
  Behauptungen: $A = \emptyset$
  Die Behauptung ist eine gültige Aussage. Also ist auch das Theorem korrekt.

$\square$

Lösung 5: Induktionsbeweis

Voraussetzung: $n \in \mathbb{N}_0$

Behauptung: $|\{w \mid w \in \{A, B, ..., Z\}*,\ |w| \leq n\}| = \frac{26^{n+1}-1}{25}$

Induktionsanfang: $n = 0$

$|\{()\}| = 1 = \frac{26^1-1}{25}$ Es gibt eine Zeichenkette der Länge 0, das leere Wort.

Induktionsschritt: $n \to n + 1$

$|\{w \mid w \in \{A, B, ..., Z\}*,\ |w| \leq n + 1\}|$
$= |\{w \mid w \in \{A, B, ..., Z\}*,\ |w| = n + 1\} \cup \{w \mid w \in \{A, B, ..., Z\}*,\ |w| \leq n\}|$

Die beiden Mengen sind disjunkt, daher

$|\{w \mid w \in \{A, B, ..., Z\}*,\ |w| = n + 1\} \cup \{w \mid w \in \{A, B, ..., Z\}*,\ |w| \leq n\}| =$

$|\{w \mid w \in \{A, B, ..., Z\}*,\ |w| = n + 1\}| + |\{w \mid w \in \{A, B, ..., Z\}*,\ |w| \leq n\}| =$

$26^{n+1} + \frac{26^{n+1}-1}{25} =$

$\frac{25*26^{n+1}}{25} + \frac{26^{n+1}-1}{25} =$

$\frac{25*26^{n+1} + 26^{n+1}-1}{25} =$

$\frac{26*26^{n+1}-1}{25} =$

$\frac{26^{n+2}-1}{25}$

$\square$