

Lösung 1: Intensional definierte Graphen

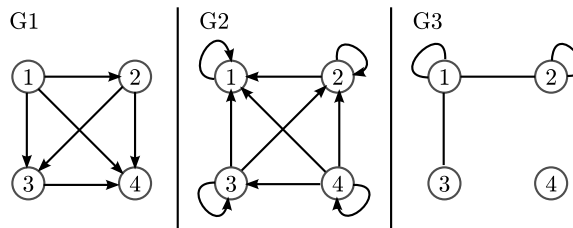


Abbildung 1: Intensional definierte Graphen

Lösung 2: Bäume

(a) Konstruieren Sie einen gerichteten Baum, indem Sie A2 am Knoten R wurzeln.

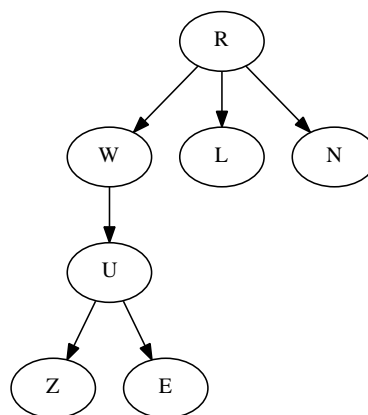


Abbildung 2: Gerichteter Baum mit Wurzel R

(b) An welchem Knoten müssen Sie A2 wurzeln, um eine vollständigen Binärbaum zu erhalten? Am Knoten W.

(c) Induktionsbeweis

Voraussetzung: B ist ein vollständiger Binärbaum der Höhe h

Behauptung: B hat 2^h Blätter

Induktionsanfang: $h = 0$

Ein Baum der Höhe 0 hat $2^0 = 1$ Blatt.

Induktionsschritt: $h \rightarrow h + 1$

Ein vollständiger Binärbaum der Höhe $h + 1$ entsteht, in dem wir zwei vollständige Binärbäume der Höhe h unter einen gemeinsamen Wurzelknoten w hängen. Der so entstehende Baum hat $2^h + 2^h = 2^{h+1}$ Blätter.

Lösung 3: Modellierung von Entscheidungen

Die kürzeste Route führt von der Uni über Dom und Rathaus zum Marienplatz.

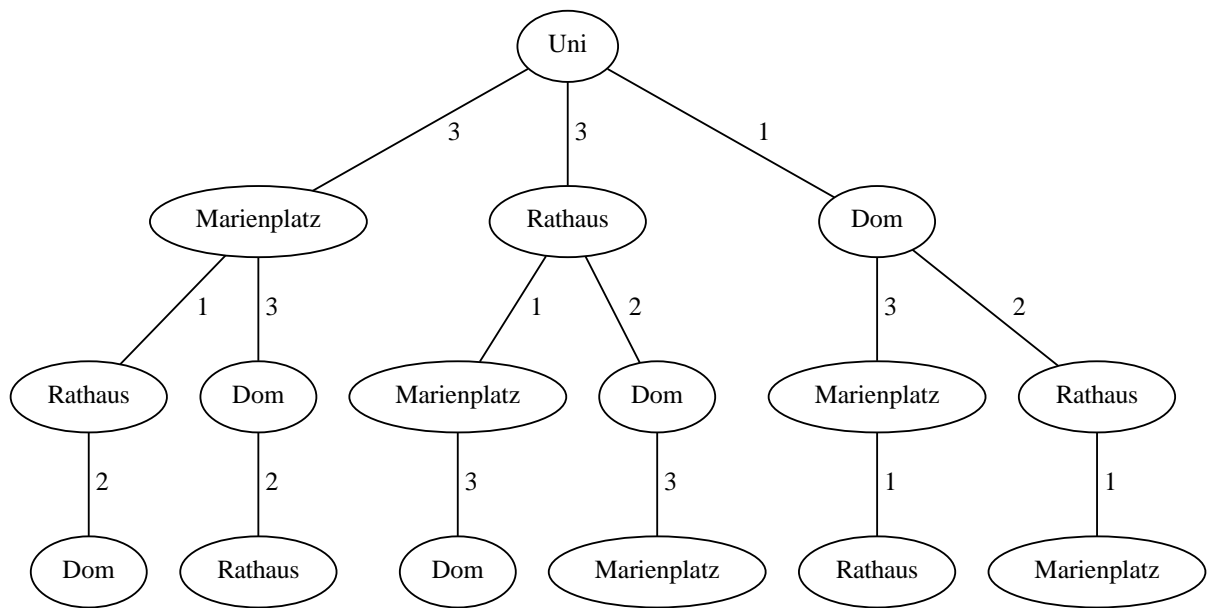
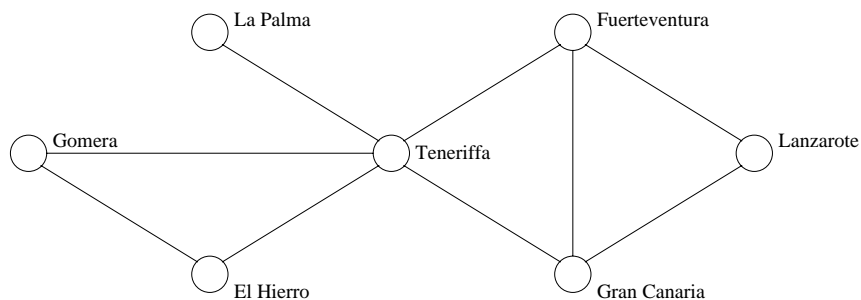


Abbildung 3: Lösungsbaum für das Glühweinproblem

Lösung 4: Graphen und Wege

- (a) Der Graph in der Abbildung modelliert die Fährverbindungen zwischen den Inseln. Ein Knoten entspricht dabei einer Insel und eine Kante einer Fährverbindung.



- (b) Die Kante $\{\text{La Palma}, \text{Teneriffa}\}$ ist eine Brückenkante und der Knoten Teneriffa ein Schnittknoten. Wird die Brückenkante aus dem Graphen entfernt, ist der Graph nicht mehr zusammenhängend. Fällt die Fährverbindung zwischen Teneriffa und La Palma aus, lassen sich also nicht mehr alle Inseln untereinander erreichen. Wird der Schnittknoten aus dem Graphen entfernt, ist der induzierte Teilgraph nicht mehr zusammenhängend. Wird also der Hafen in Teneriffa gesperrt, lassen sich die Inseln der verbleibenden Häfen nicht mehr untereinander erreichen.
- (c) Eine Rundreise, bei der jede Insel genau einmal besucht wird entspricht einem Hamiltonkreis im Graphen. In dem Graphen gibt es keinen Hamiltonkreis, weil der Graph einen Schnittknoten (Teneriffa) enthält. Gäbe es eine solche Rundreise, könnte diese auf einer beliebigen Insel beginnen. Würde die Rundreise also auf der Insel Teneriffa beginnen, müsste es möglich sein von Teneriffa ausgehend alle Inseln zu besuchen, ohne zwischenzeitlich zur Insel Teneriffa zurückzukehren. Das ist aber offensichtlich nicht möglich.
- (d)
- Es gibt eine Rundreise, bei der jede Fährverbindung genau einmal genutzt wird, genau dann wenn der Graph einen Eulerkreis enthält.
 - Es gibt eine Reise, bei der jede Fährverbindung genau einmal genutzt wird, genau dann wenn der Graph einen Eulerweg enthält.

- Jede Insel kann von jeder anderen Insel aus direkt oder indirekt erreicht werden, wenn der Graph zusammenhängend ist.
- Fährverbindungen bestehen nur zwischen verschiedenen Inseln, genau dann, wenn der Graph keine Schleifen enthält.
- Von jeder Insel aus kann man zu maximal 5 anderen Inseln direkt übersetzen, wenn der Grad des Graphen kleiner oder gleich 5 ist. Wenn wir Insel-Knoten mit Schleifen zulassen ("Hafenrundfahrt") kann man zu maximal 5 *anderen* Inseln direkt übersetzen, wenn der Grad des Graphen kleiner oder gleich 6 ist.