

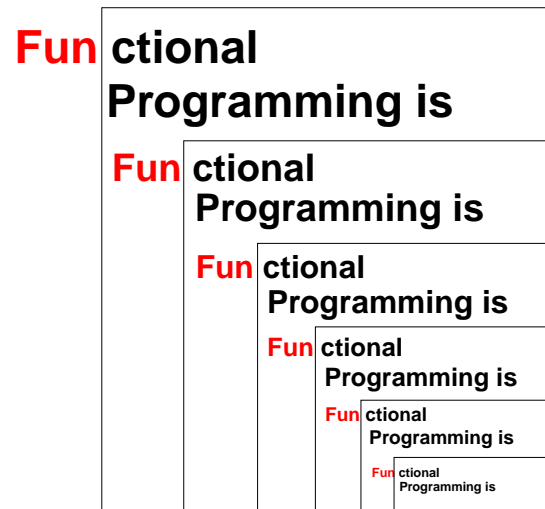
Funktionale Programmierung

Prof. Dr. Uwe Kastens

SS 2013

Ziele:
Begrüßung

Functional Programming is Fun



Ziele:
Motivation

Ziele, Material

FP-1.2

Die Teilnehmer sollen

- die **Klarheit und Mächtigkeit** der funktionalen Programmierung erkennen,
- **Paradigmen** der funktionalen Programmierung erlernen,
- **Techniken** der funktionalen Programmierung an praktischen Beispielen erproben und einüben

Literatur:

- **Vorlesungsmaterial:**
<http://ag-kastens.upb.de/lehre/material/fp>
- **Textbuch:**
L. C. Paulson: ML for the Working Programmer, 2nd Edition, Cambridge University Press, 1996
Schwerpunkt stärker auf Paradigmen und Techniken als auf der Sprache SML, enthält viele Beispiele bis hin zu nützlichen Modulen.
- Weiteres Buch zu SML:
C. Myers, C. Clack, E. Poon: Programming with Standard ML, Prentice Hall, 1993
- siehe auch Internet-Links im Vorlesungsmaterial
<http://ag-kastens.upb.de/lehre/material/fp/wwwrefs.html>

Vorlesung Funktionale Programmierung SS 2013 / Folie 102

Ziele:

Ziele und Durchführung klären

in der Vorlesung:

- Ziele, Material erläutern,
- Übungen planen

Verständnisfragen:

Was sind Ihre Ziele?

Inhalt

FP-1.3

	Kapitel im Textbuch
1. Einführung	
2. LISP: FP Grundlagen	
3. Grundlagen von SML	2
4. Programmierparadigmen zu Listen	3
5. Typkonstruktoren, Module	2, 4, 7
6. Funktionen als Daten	5
7. Datenströme	5
8. Lazy Evaluation	
9. Funktionale Sprachen: Haskell, Scala	
10. Zusammenfassung	

Vorlesung Funktionale Programmierung SS 2013 / Folie 103

Ziele:

Übersicht über den Inhalt bekommen

in der Vorlesung:

Themen und Zusammenhang zum Textbuch erläutern

Vorkenntnisse in FP aus Modellierung, GPS und PLaC

Modellierung:

- Modellierung mit Wertebereichen

GPS:

- Datentypen, parametrisierte Typen (Polytypen)

• Funktionale Programmierung:

SML-Eigenschaften:

- Notation
- Deklarationen, Muster
- Funktionen, Aufrufe
- Listen
- Datentypen, Polymorphie

Programmiertechniken:

- Rekursion zur Induktion
- Rekursion über Listen
- akkumulierender Parameter
- Berechnungsschemata (HOF)
- Currying (HOF)

PLaC:

- Spracheigenschaften und ihre Implementierung
- Typsysteme, Typanalyse für funktionale Sprachen

Vorlesung Funktionale Programmierung SS 2013 / Folie 104

Ziele:

Voraussetzungen für die Vorlesung FP klären

in der Vorlesung:

- Bezug der genannten Themen zu Abschnitten dieser Vorlesung herstellen,
- Vereinbaren, welche Themen selbständig wiederholt werden und welche in der Vorlesung wiederholt und dann vertieft werden.

Verständnisfragen:

Beherrschen Sie die hier genannten Themen?

Gedankenexperiment

Wähle eine **imperative Sprache**, z. B. Pascal, C.

Erlaube Eingabe nur als Parameter und Ausgabe nur als Ergebnis des Programmaufrufes.

Eliminiere Variablen mit Zuweisungen.

Eliminiere schrittweise alle **Sprachkonstrukte**, die **nicht mehr sinnvoll anwendbar** sind.

eliminiertes Sprachkonstrukt	Begründung
...	...
...	...

Betrachte die **restliche Programmiersprache**.

Ist sie **sinnvoll anwendbar**?

Erweitere sie um nützliche Konstrukte (nicht Variablen mit Zuweisungen)

ergänzendes Sprachkonstrukt	Begründung
...	...
...	...

Vorlesung Funktionale Programmierung SS 2013 / Folie 105

Ziele:

Imperative und funktionale Sprachkonstrukte klassifizieren

in der Vorlesung:

Die Gedankenexperimente werden gemeinsam diskutiert.

2. LISP: FP Grundlagen

Älteste funktionale Programmiersprache (McCarthy, 1960).

Viele weit verbreitete **Weiterentwicklungen** (Common LISP, Scheme).

Ursprünglich wichtigste Sprache für Anwendungen im Bereich **Künstlicher Intelligenz**.

Hier nur **Pure LISP**:

Notation:

geklammerte Folge von Symbolen
gleiche Notation für Programm und Daten

Datenobjekte:

Listen: (1 2 3 4) (ggT 24 36)
atomare Werte: T, F, NIL, Zahlen, Bezeichner

Beispiel: Fakultätsfunktion mit akkumulierendem Parameter (**defun** nicht in Pure Lisp)

```
(defun AFac (n a)
  (cond ((eq n 0) a)
        (T (AFac (- n 1) (* a n)))))
(defun Fac (n) (AFac n 1))
```

Aufruf: (Fac 4)

Vorlesung Funktionale Programmierung SS 2013 / Folie 201

Ziele:

Zurück zu den Wurzeln der Funktionalen Programmierung

in der Vorlesung:

An Beispielen wird ein erster Eindruck von LISP gegeben

Übungsaufgaben:

Vergleichen Sie die Funktion mit der Notation in SML

Grundfunktionen

Aufruf: (e0 e1 ... en).

Ausdruck e0 liefert die aufzurufende Funktion,
die übrigen liefern Werte der aktuellen Parameter.

Grundfunktionen:

(cons e l)	Listenkonstruktor
(car l)	Listenkopf
(cdr l)	Listenrest
(null l)	leere Liste?
(eq a b)	Vergleich atomarer Werte
(equal l1 l2)	tiefer Vergleich von Listen
(atom e)	atomar?
(cond (p1 e1) ... (pn en))	Fallunterscheidung; nicht-strikte Auswertung: (p _i e _i) von links nach rechts auswerten bis ein p _j T liefert; Ergebnis ist dann e _j . e wird nicht ausgewertet, sondern ist selbst das Ergebnis
(quote e)	
(lambda (x1 ... xn) e)	Funktionskonstruktor mit formalen Parametern x1...xn und Funktionsrumpf e
nicht in Pure Lisp:	
(setq x e)	Wert von e wird an x gebunden (top level)
(defun f (x1 ... xn) e)	Funktion wird an f gebunden (top level)

Vorlesung Funktionale Programmierung SS 2013 / Folie 202

Ziele:

Grundfunktionen von LISP verstehen

in der Vorlesung:

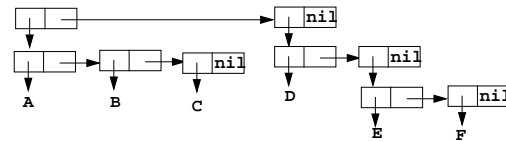
An Beispielen wird erläutert:

- Notation,
- Vergleiche,
- Bedingungskonstrukt,
- Striktheit,
- Lambda-Ausdruck
- Bindungen mit setq und defun
- top-level des Interpretierers

Listen als Programm und Daten

Eine **Liste** ist eine evtl. leere Folge von Ausdrücken;
Jeder Ausdruck ist ein Atom oder eine Liste:

```
'()
'((A B C) (D (E F)))
```



```
(cdr (cdr '(1 2 3 4)))
```

Ein **Aufruf** ist eine Liste; beim Auswerten liefert ihr erstes Element eine **Funktion**;
die weiteren Elemente liefern die **aktuellen Parameterwerte** des Aufrufes.

Ein **Programm** ist eine Liste von geschachtelten Aufrufen.

Das Programm operiert auf Daten; sie sind Atome oder Listen.

Die Funktion **quote** **unterdrückt die Auswertung** eines Ausdruckes; der Ausdruck selbst ist das Ergebnis der Auswertung:

Die Auswertung von `(quote (1 2 3 4))` liefert `(1 2 3 4)`

Kurznotation für `(quote (1 2 3 4))` ist `'(1 2 3 4)`

Listen, die Daten in Programmen angeben, müssen durch **quote** gegen Auswerten geschützt werden: `(length (quote 1 2 3))` oder `(length '(1 2 3))`

Vorlesung Funktionale Programmierung SS 2013 / Folie 203

Ziele:

Listennotation und -darstellung verstehen

in der Vorlesung:

An Beispielen wird erläutert:

- Listennotation: verkettete Paare,
- Programme und Daten bestehen aus Listen und Atomen,
- Unterdrückung der Auswertung verstehen (quote)

Einige Funktionen über Listen

Länge einer Liste:

```
(defun Length (l) (cond ((null l) 0) (T (+ 1 (Length (cdr l))))))
```

Aufruf `(Length '(A B C))` liefert 3

Map-Funktion (`map` ist vordefiniert):

```
(defun Map (f l)
  (cond ((null l) nil)
        (T (cons (funcall f (car l))
                  (Map f (cdr l))))))
```

Aufruf `(Map (lambda (n) (cons n (cons n nil))) '(1 2 3))`

liefert `'((1 1) (2 2) (3 3))`

```
(funcall f p)
```

wertet `f` zu einer Funktion aus und ruft diese mit dem Parameter `p` auf

Vorlesung Funktionale Programmierung SS 2013 / Folie 204

Ziele:

Notation und Struktur von Funktionen verstehen

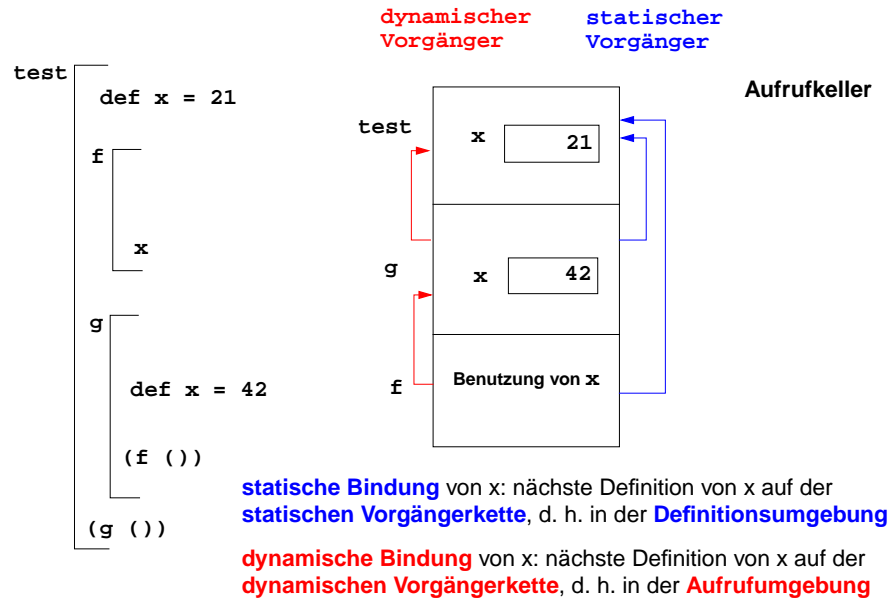
in der Vorlesung:

An Beispielen wird erläutert:

- Funktionen lesen,
- aufrufen,
- umformulieren in SML

Statische oder dynamische Bindung von Namen

FP-2.5



© 2013 bei Prof. Dr. Uwe Kastens

Vorlesung Funktionale Programmierung SS 2013 / Folie 205

Ziele:

Dynamische Bindung verstehen

in der Vorlesung:

Am Beispiel wird erläutert:

- statische Bindung bei geschachtelten Funktionen,
- Laufzeitkeller mit statischen und dynamischen Vorgängerverweisen,
- dynamische Bindung
- Regelung in LISP: ursprünglich dynamische Bindung

Übungsaufgaben:

Explorieren Sie, welche Bindung in Common LISP gilt.

Statische oder dynamische Bindung in Common Lisp?

FP-2.5a

Bindungen in geschachtelten Lambda-Ausdrücken:

```

(print
  ((lambda (x)
    ((lambda (f)
      ((lambda (x)
        (funcall f 1)
      )
      42
    )
    )
    (lambda (n) x)
  )
  )
  21
)

```

; Umgebung test1 bindet x
; Umgebung test2 bindet f
; Umgebung g bindet x
; Aufruf von f benutzt ein x
; gebunden an g.x
; gebunden an test2.f, benutzt x
; gebunden an test1.x

Ergebnis bei statischer oder bei dynamischer Bindung?

© 2013 bei Prof. Dr. Uwe Kastens

Vorlesung Funktionale Programmierung SS 2013 / Folie 205a

Ziele:

Bindung von Namen in LISP

in der Vorlesung:

Es wird erläutert:

- Struktur des Programms entspricht der auf der vorigen Folie.
- Das Programm enthält keine Variablen - nur Parameter.
- Am Ergebnis der Ausführung kann statische von dynamischer Bindung unterschieden werden.

Bindungen und Closures

Definition (freie Variable): Wenn ein **Name x innerhalb einer Funktion f nicht** durch eine Parameterdefinition oder eine lokale Definition **gebunden** ist, dann bezeichnet x eine **freie Variable bezüglich der Funktion f**.

Beispiele:

```
fun f (a, b) = a*x+b
fn (a, b) => a*x+b

(defun f (a b) (+ (* a x) b))
(lambda (a b) (+ (* a x) b))
```

Beim **Aufruf** einer Funktion f werden ihre freien Variablen je nach statischer oder dynamischer Bindung in der Definitions- oder Aufrufumgebung gebunden.

Funktionen können **als Daten** verwendet werden: Funktionen als Parameter, Ergebnis, Komponente von zusammengesetzten Werten, Wert von Variablen (imperativ). Für den Aufruf benötigen sie eine Closure:

Die **Closure** einer Funktion f ist eine **Menge von Bindungen**, in der beim Aufruf von f die **freien Variablen von f gebunden** werden.

Dynamische Bindung: Closure liegt im Aufrufkeller.

Statische Bindung: Closure ist in der Kette der **statischen Vorgänger** enthalten; diese müssen ggf. auf der Halde statt im Laufzeitkeller gespeichert werden, da Schachteln (und deren Variablen) noch benötigt werden, wenn ihr Aufruf beendet ist

Vorlesung Funktionale Programmierung SS 2013 / Folie 206

Ziele:

Closures verstehen

in der Vorlesung:

An Beispielen wird erläutert:

- Aufruf von Funktionen als Daten,
- Bindung freier Variable in der Closure des Aufrufes.

3. Grundlagen von SML 3.1 Ausdrücke und Aufrufe

Grundkonzepte funktionaler Sprachen:

Funktionen und Aufrufe, Ausdrücke

keine Variablen mit Zuweisungen, keine **Ablaufstrukturen**,
keine **Seiteneffekte** (im Prinzip: aber E/A, Interaktion, Abbruch etc.)

Funktionale Sprachen sind **ausdrucksorientiert** (statt anweisungsorientiert):
Programme bestehen aus Definitionen und Ausdrücken (statt Anweisungen).
Typisch: bedingter Ausdruck statt bedingter Anweisung.

```
if a>b then a-b else b-a
```

Die Auswertung jedes Programmkonstruktes liefert einen Wert
(statt einen Effekt zu erzeugen, d.h. den Programmzustand zu ändern).

Vorlesung Funktionale Programmierung SS 2013 / Folie 301

Ziele:

Sprachen ohne Anweisungen verstehen

in der Vorlesung:

- Seiteneffekt-frei und Ausnahmen davon,
- Rolle bedingter Ausdrücke

Aufruf-Semantik Call-by-value (strikt)

Auswertung von Funktionsaufrufen (`mul (2, 4)`) und von Ausdrücken mit Operatoren (`2 * 4`) sind semantisch gleichwertig.

In SML haben alle Funktionen genau einen Parameter, ggf. ein Tupel.

Aufruf: (Funktionsausdruck Parameterausdruck)

Auswertung nach call-by-value, strikte Auswertung:

1. **Funktionsausdruck auswerten und Closure bestimmen;** Ergebnis ist eine Funktion mit einer Closure, in der die freien Variablen der Funktion gebunden werden.
2. **Parameterausdruck auswerten;** Ergebnis an den formalen Parameter der Funktion binden.
3. **Funktionsrumpf** mit Bindungen des formalen Parameters und der Closure **auswerten;** Ergebnis ist das Ergebnis der Ausdrucksauswertung.

Beispiel:

```
fun sqr x : int = x * x;
fun zero (x : int) = 0;
```

Auswertung modelliert durch **Substitution von innen nach außen:**

```
sqr (sqr (sqr 2)) => sqr (sqr (2 * 2)) => ...
zero (sqr (sqr (sqr 2))) => ...
```

Bedingte Ausdrücke werden nicht strikt ausgewertet!

Vorlesung Funktionale Programmierung SS 2013 / Folie 302

Ziele:

Aufruf-Semantik von SML verstehen

in der Vorlesung:

An Beispielen wird erläutert:

- Aufruf-Semantik,
- Substitution von innen nach außen,
- nicht-strikte bedingter Ausdruck.

Aufruf-Semantik Call-by-need - lazy evaluation

Aufruf: (Funktionsausdruck Parameterausdruck)

Auswertung nach call-by-name:

1. und 3. wie oben

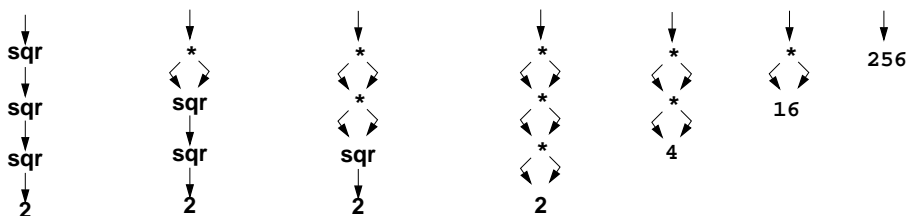
2. **Parameterausdruck** an jedes Auftreten des formalen Parameters im Funktionsrumpf substituieren (nach konsistenter Umbenennung der Namen im Parameterausdruck).

Beispiel: Auswertung modelliert durch **Substitution von außen nach innen:**

```
sqr (sqr (sqr 2)) => (sqr (sqr 2)) * (sqr (sqr 2)) => ...
zero (sqr (sqr (sqr 2))) => 0
```

* wird als Elementaroperator strikt ausgewertet.

Auswertung nach call-by-need (lazy evaluation): wie **call-by-name**, aber der aktuelle Parameter wird **höchstens einmal ausgewertet** und sein Wert ggf. wiederverwendet. modelliert durch **Graph-Substitution von außen nach innen:**



Vorlesung Funktionale Programmierung SS 2013 / Folie 303

Ziele:

Call-by-need verstehen

in der Vorlesung:

An Beispielen wird erläutert:

- alternative Aufruf-Semantik: Grundlage für lazy evaluation,
- Graph-Substitution,
- nicht-strikte bedingter Ausdruck ist formulierbar,
- nicht-endliche Datenstrukturen sind benutzbar,
- aber zero(E) liefert 0, sogar wenn die Auswertung von E nicht terminiert! Aufruf von zero wird nicht strikt ausgewertet.

3.2 Deklarationen in SML, Muster

FP-3.4

Grundform von Deklarationen:

```
val Muster = Ausdruck
```

Der Ausdruck wird ausgewertet und liefert einen Wert w.

Das Muster ist hierarchisch aufgebaut aus

- **Bezeichnern**, die gebunden werden sollen; derselbe Bezeichner darf nicht mehrfach in einem Muster vorkommen;
- **Konstruktoren** für Datentypen, z. B. Tupel (,), Listen :: oder durch `datatype` eingeführte Konstruktoren, Zahlen;
- `_` anstelle eines Bezeichners (es wird nicht gebunden).

Der Wert w wird gemäß der Struktur des Musters zerlegt. Die Teilwerte werden an die entsprechenden Bezeichner gebunden.

```
fun foo x = (x, x);  
  
val x = sqr 3;          val (a, b) = (sqr 2, sqr 3);  
val (c, d) = foo 42;    val (x,y)::z = [foo 41, (3,4), (5,6)];  
val h::_ = [1, 2, 3];
```

© 2008 bei Prof. Dr. Uwe Kastens

Vorlesung Funktionale Programmierung SS 2013 / Folie 304

Ziele:

Muster mit mehrfachen Bindungen verstehen

in der Vorlesung:

An Beispielen werden Muster erläutert.

Funktionsdeklarationen

FP-3.5

`val`-Deklaration einer rekursiven Funktion:

```
val rec Fac = fn n => if n <= 1 then 1 else n * Fac (n-1);
```

Kurzform für Funktionsdeklarationen:

```
fun Name Parametermuster = Ausdruck;  
  
fun Fac n = if n <= 1 then 1 else n * Fac (n-1);
```

Funktionsdeklaration mit Fallunterscheidung über Muster:

```
fun FName Muster1 = Ausdruck1  
  | FName Muster2 = Ausdruck2  
  ...;
```

Die Muster werden nacheinander auf den Parameter angewandt, bis das erste trifft.

```
fun app (nil, lr) = lr  
  | app (ll, nil) = ll  
  | app (h::t, r) = h :: (app (t, r));
```

statt mit bedingten Ausdrücken über den Parameter:

```
fun app (ll, lr) = if ll = nil then lr else  
  if lr = nil then ll else  
  (hd ll) :: (app (tl ll, lr));
```

© 2004 bei Prof. Dr. Uwe Kastens

Vorlesung Funktionale Programmierung SS 2013 / Folie 305

Ziele:

Lang- und Kurzformen verstehen

in der Vorlesung:

An den Beispielen werden die Formen erläutert.

Statische Bindung in SML

Auswerten einer `val`-Deklaration erzeugt eine **Menge von Bindungen** *Bezeichner -> Wert*, je eine für jeden Bezeichner im Muster.

In einer **Gruppe von Deklarationen**, die mit `and` verknüpft sind, gelten **alle Bindungen** der Gruppe **in allen Ausdrücken** der Gruppe (Algol-Verdeckungsregel)

```
fun f x = if p x then x else g x and
    g x = if q x then x else f x;
```

In **einzelnen Deklarationen**, die durch `;` getrennt werden, gelten die Definitionen **erst nach dem Ausdruck** der Deklaration.

Ausnahme: `val rec Muster = Ausdruck`; Bindungen gelten schon im Ausdruck.

Jede **einzelne Deklaration** oder Deklarationsgruppe bildet einen einzelnen **Abschnitt** im Sinne der Verdeckungsregeln: **Gleichbenannte Deklarationen verdecken Bindungen** des umfassenden (vorangehenden) Konstruktes:

```
val a = 42;
val b = 2 * a;
val a = 3;
val c = a + 1;
a + b * c;
```

`let`-Konstrukt fasst Deklarationen mit dem Ausdruck zusammen, in dem ihre Bindungen gelten:

```
let D1; D2; ... in Ausdruck end
```

`local`-Konstrukt fasst Deklarationen mit der Deklaration zusammen, in der ihre Bindungen gelten:

```
local D1; D2; ... in Deklaration end
```

Ziele:

Gültigkeit von Bindungen

in der Vorlesung:

An Beispielen wird erläutert:

- Verdeckung in Folgen von Deklarationen,
- rekursive Deklarationen,
- lokale Deklarationen.

3.3 Typen, Grundtypen

int und real:

real-Literale: `1.2E3` `7E~5`

binäre Operatoren: `+` `-` `*` `/`

unäres Minus: `~`

sind **überladen** für `int` und `real`.

Deshalb sind Typangaben nötig, wenn der Typ der Operanden nicht eindeutig ist:

```
fun sqr (x : real) = x * x;
```

Funktionsbibliotheken `Int`, `Real`, `Math`:

```
Int.min (7, Int.abs i);
Math.sin (r) / r;
```

string:

Literale wie in C: `"Hello World!\n"`

Konkatenationsoperator: `^`

Funktionsbibliothek `String`

char:

Literale: `#"a"` `#"n"`

bool:

Literale: `true` `false`

Operatoren: `orelse` `andalso` `not`

nicht strikt, d. h. Kurzauswertung (wie in C)

Vergleichsoperatoren: `=`, `<`, `>`, `>=`, `<=`

Ziele:

Grundtypen verstehen

in der Vorlesung:

An Beispielen wird erläutert:

- Literale,
- Operatoren,
- Bibliotheken

Tupel, Records

FP-3.8

Tupel:

```
val zerovec = (0.0, 0.0); val today = (5, "Mai", 2010);
```

Funktion mit Tupel als Parameter:

```
fun average (x, y) = (x+y)/2.0; average (3.1, 3.3);
```

Typdefinitionen:

```
type Vec2 = real * real;  
fun trans ((a,b):Vec2, x):Vec2 = (a+x, b+x);  
trans (zerovec, 3.0);
```

Records - Tupel mit Selektornamen:

```
type Date = {day:int, month:string, year:int};  
val today = {year=2010, month="Mai", day=5}:Date;  
fun add1year {day=d, month=m, year=y} =  
  {day=d, month=m, year=(y+1)};
```

Benutzung von Selektorfunktionen:

```
#day today;
```

unvollständiges Record-Pattern:

```
fun thisyear ({year,...}:Date) = year = 1997;
```

© 2010 bei Prof. Dr. Uwe Kastens

Vorlesung Funktionale Programmierung SS 2013 / Folie 308

Ziele:

Grundlegende Verbundtypen verstehen

in der Vorlesung:

An Beispielen wird erläutert:

- Notation, Unterscheidung, Anwendung von Tupel- und Record-Typen.

Parametrisierte Typen (GdP-5.9)

FP-3.9

Parametrisierte Typen (Polytypen, polymorphe Typen):

Typangaben mit **formalen Parametern**, die für Typen stehen.

Man erhält aus einem Polytyp einen konkreten Typ durch **konsistentes Einsetzen eines beliebigen Typs** für jeden Typparameter.

Ein Polytyp beschreibt die **Typabstraktion**, die allen daraus erzeugbaren konkreten Typen gemeinsam ist.

Beispiele in SML-Notation mit 'a, 'b, ... für Typparameter:

Polytyp	gemeinsame Eigenschaften	konkrete Typen dazu
'a × 'b	Paar mit Komponenten beliebigen Typs	int × real int × int
'a × 'a	Paar mit Komponenten gleichen Typs	int × int (int->real) × (int->real)

rekursiv definierte Polytypen:

```
'a list = 'a × 'a list | {nil}      int list  
          homogene, lineare Listen  real list  
                                     (int × int) list
```

Verwendung z. B. in **Typabstraktionen** und in **polymorphen Funktionen**

© 2013 bei Prof. Dr. Uwe Kastens

Vorlesung Funktionale Programmierung SS 2013 / Folie 309

Ziele:

Polymorphe Typen wiederholen

in der Vorlesung:

Das Konzept wird an Beispielen kurz erläutert.

Polymorphe Funktionen (GdP-5.9a)

(Parametrisch) **polymorphe Funktion**:

eine Funktion, deren **Signatur ein Polytyp** ist, d. h. Typparameter enthält.

Die Funktion ist auf Werte eines jeden konkreten Typs zu der Signatur anwendbar.
D. h. sie muss unabhängig von den einzusetzenden Typen sein;

Beispiele:

Eine Funktion, die die Länge einer beliebigen homogenen Liste bestimmt:

```
fun length l = if null l then 0 else 1 + length (tl l);
polymorphe Signatur: 'a list -> int
Aufrufe: length ([1, 2, 3]); length ((1, true), (2, true));
```

Funktionen mit Paaren:

```
fun pairself x = (x, x);
fun car (x, _) = x;
fun cdr (_, (x, _)) = x;
fun id x = x;
```

Vorlesung Funktionale Programmierung SS 2013 / Folie 310

Ziele:

Polymorphe Funktionen wiederholen

in der Vorlesung:

Das Konzept wird an Beispielen kurz erläutert. Signaturen bestimmen.

Typinferenz

SML ist **statisch typisiert**. **Typangaben** sind meist **optional**.

Typinferenz:

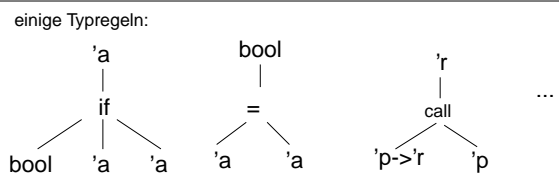
Der **Typ T** eines Programmobjektes (benannt in Deklaration) oder eines Programmkonstruktes (unbenannter Ausdruck) wird aus dem Programmtext statisch ermittelt und geprüft.

T ist der **allgemeinste Typ** (hinsichtlich der Typparameter), der mit den Operationen in der Deklaration bzw. in dem Ausdruck konsistent ist.

Verfahren:

Gleichungssystem mit Typvariablen vollständig aufstellen:

- Typ von Literalen ist bekannt.
- Typ von gebundenen Namen ist bekannt.
- Für hier definierte Namen n (in Mustern) $\text{Typ}(n)$ einsetzen
- Typregeln für jedes Programmkonstrukt auf Programmbaum systematisch anwenden, liefert **alle** Gleichungen.



Gleichungssystem lösen:

- Widersprüche \rightarrow Typfehler
- Alle Typvariablen gebunden \rightarrow Typen der definierten Namen gefunden
- Einige Typvariablen bleiben offen \rightarrow der Typ ist **polymorph**

Vorlesung Funktionale Programmierung SS 2013 / Folie 311

Ziele:

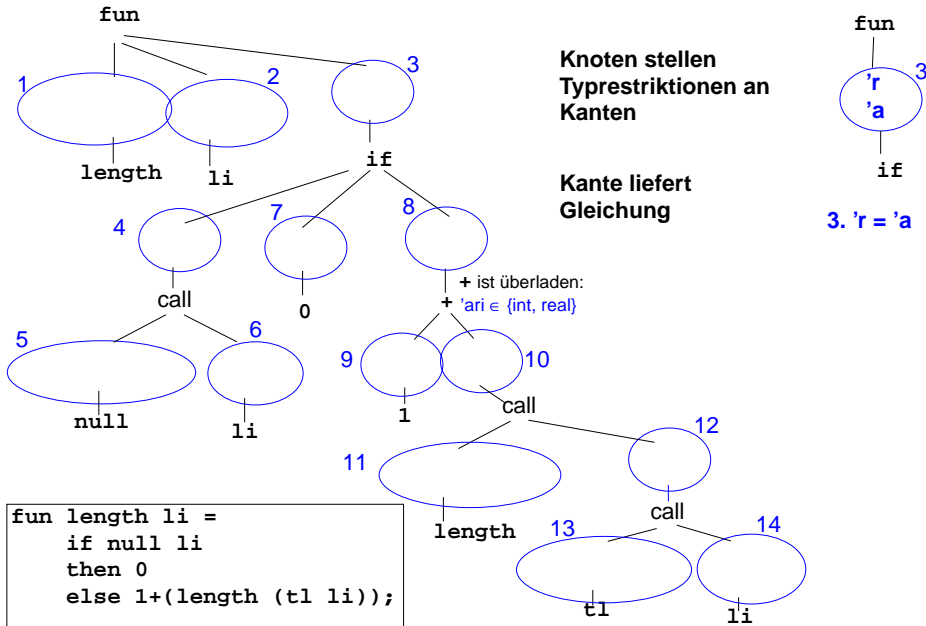
Typinferenz verstehen

in der Vorlesung:

An Beispielen wird erläutert:

- allgemeinsten Typ.
- Gleichungssystem aufstellen.
- Gleichungssystem lösen.

Beispiel zur Typinferenz, Strukturbaum



Vorlesung Funktionale Programmierung SS 2013 / Folie 311a

Ziele:

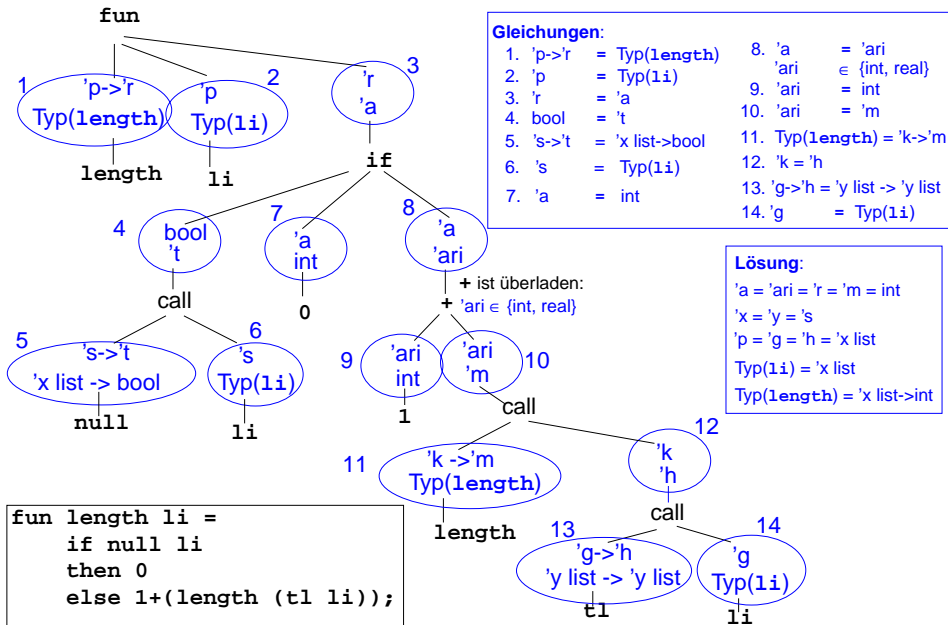
Typinferenz verstehen

in der Vorlesung:

Am Beispiel der length-Funktion wird erläutert:

- Baum erstellen,
- Typen aus Typregeln einsetzen,
- Gleichungssystem aufstellen,
- Gleichungssystem lösen.

Beispiel zur Typinferenz



Vorlesung Funktionale Programmierung SS 2013 / Folie 311b

Ziele:

Typinferenz verstehen

in der Vorlesung:

Am Beispiel der length-Funktion wird erläutert:

- Baum erstellen,
- Typen aus Typregeln einsetzen,
- Gleichungssystem aufstellen,
- Gleichungssystem lösen.

4. Programmierparadigmen zu Listen; Grundlagen

Listen in SML sind **homogen**, die Elemente einer Liste haben denselben Typ.
Vordefinierter Typ:

```
datatype 'a list = nil | :: of 'a * 'a list
```

Konstruktoren:

```
nil      = []
x :: xs  :: ist rechtsassoziativ: 3 :: 4 :: 5 :: nil = [3, 4, 5]
```

Vordefinierte Funktionen:

```
length l  Anzahl der Elemente in l
hd l      erstes Element von l
tl l      l ohne das erste Element
null l    ist l = nil?
rev l     l in umgekehrter Reihenfolge
l1 @ l2   Konkatenation von l1 und l2
```

Beispiel:

```
fun upto (m, n) = if m > n then [] else m :: upto (m+1, n);
```

Vorlesung Funktionale Programmierung SS 2013 / Folie 401

Ziele:

Erinnerung an die Grundlagen

in der Vorlesung:

Die Funktionen werden kurz erläutert.

Rekursionsmuster Listentyp

Struktur des Datentyps:

```
datatype 'a list = nil | :: of ('a * 'a list)
```

Paradigma: Funktionen haben die **gleiche Rekursionsstruktur wie der Datentyp**:

```
fun F (nil) = nicht-rekursiver Ausdruck
  | F (h::t) = Ausdruck über h und F t
```

```
fun prod nil = 1
  | prod (h::t) = h * prod t;
```

Varianten:

```
fun member (nil, m) = false
  | member (h::t, m) = if h = m then true else member (t, m);
```

```
fun append (nil, r) = r
  | append (l, nil) = l
  | append (h::t, r) = h :: append (t, r);
```

Abweichung: Alternative 1- oder mehrelementige Liste; (Patternliste ist nicht vollständig!)

```
fun maxl [m] = m
  | maxl (m::n::ns) = if m > n then maxl (m::ns) else maxl (n::ns);
```

Vorlesung Funktionale Programmierung SS 2013 / Folie 402

Ziele:

Rekursionsparadigma und Varianten

in der Vorlesung:

Erinnerung an das Rekursionsparadigma und Erläuterung der Varianten.

Akkumulierender Parameter für Funktionen auf Listen

Akkumulierender Parameter

- führt das bisher berechnete **Zwischenergebnis** mit,
- macht die Berechnung **end-rekursiv**,
- wird mit dem **neutralen Element der Berechnung initialisiert**,
- verknüpft die Listenelemente von **vorne nach hinten**.

```
fun zlength nil = 0
  | zlength (_::t) = 1 + zlength t;

fun alength (nil, a) = a
  | alength (_::t, a) = alength (t, a+1);
```

Beispiel: Nimm die ersten i Elemente einer Liste:

```
fun atake (nil, _, taken) = taken
  | atake (h::t, i, taken) = if i>0 then atake (t, i-1, h::taken)
                             else taken;
```

Die Partner-Funktion `drop` ist schon end-rekursiv:

```
fun drop (nil, _) = nil
  | drop (h::t, i) = if i>0 then drop (t, i-1) else h::t;
```

Vorlesung Funktionale Programmierung SS 2013 / Folie 403

Ziele:

Direkt mit akkumulierendem Parameter programmieren

in der Vorlesung:

An den Beispielen

- wird an das Prinzip erinnert und
- die Technik erläutert.

Listen aus Listen und Paaren

Liste von Listen konkatenieren:

Signatur: `concat: 'a list list -> 'a list`

```
fun concat nil = nil
  | concat (x :: xs) = x @ concat xs;
```

Aufwand: `Anzahl ::` = Gesamtzahl der Elemente; Rekursionstiefe = Anzahl der Teillisten

Listen von Paaren herstellen: 2-stellige Relation, Zuordnung
überzählige Elemente werden weggelassen. Reihenfolge der Muster ist relevant!

Signatur: `'a list * 'b list -> ('a * 'b) list`

```
fun zip (x::xs,y::ys) = (x,y) :: zip (xs,ys)
  | zip _ = nil;
```

Paar-Liste auflösen:

Signatur: `('a * 'b) list -> 'a list * 'b list`

```
fun unzip nil = (nil, nil)
  | unzip ((x, y) :: pairs) =
    let val (xs, ys) = unzip pairs in (x :: xs, y :: ys) end;
```

end-rekursiv, Ergebnis in umgekehrter Reihenfolge, mit akkumulierenden Parametern `xs, ys`:

```
local fun revUnzip (nil, xs, ys) = (xs, ys)
      | revUnzip ((x, y):: pairs, xs, ys) =
          revUnzip (pairs, x::xs, y::ys);
in fun iUnzip z = revUnzip (z, nil, nil) end;
```

Vorlesung Funktionale Programmierung SS 2013 / Folie 404

Ziele:

Listen verknüpfen lernen

in der Vorlesung:

Die Funktionen werden an Beispielen erläutert:

- strukturierte Listen in flache Listen,
- Paar-Listen als Relationen,
- Reihenfolge der Muster,
- zwei akkumulierende Parameter,
- Reihenfolge der Elemente.

Ziele:

Beispielaufgabe verstehen

in der Vorlesung:

An Beispielen wird erläutert:

- die Aufgabe,
- die Repräsentation von Münzsystemen,
- das Greedy-Verfahren

Liste aller Lösungen am Beispiel: Münzwechsel (1)

FP-4.5

geg.: Liste verfügbarer Münzwerte und auszuzahlender Betrag
 ges.: Liste von Münzwerten, die den Betrag genau auszahlt

zur Einstimmung:

Greedy-Verfahren mit genau einer Lösung. Es gelte
 (*) Liste der verfügbaren Münzwerte ist fallend sortiert. Der kleinste Wert ist 1.
 Garantiert Terminierung.

```
fun change (coinvals, 0)          = []
| change (c :: coinvals, amount) =
    if amount < c then change (coinvals, amount)
    else c :: change (c :: coinvals, amount - c);
```

einige Münzsysteme:

```
val euro_coins = [200, 100, 50, 20, 10, 5, 2, 1];
val gb_coins  = [50, 20, 10, 5, 2, 1];
val dm_coins  = [500, 200, 100, 50, 10, 5, 2, 1];
```

Aufrufe mit Ergebnissen:

```
- change (euro_coins, 489);
> val it = [200, 200, 50, 20, 10, 5, 2, 2] : int list
- change (dm_coins, 489);
> val it = [200, 200, 50, 10, 10, 10, 5, 2, 2] : int list
```

Ziele:

Systematischen Entwurf verstehen

in der Vorlesung:

An Beispielen wird erläutert:

- Aufgabenstellung,
- Signatur mit akkumulierendem Parameter,
- Invarianten über Parameter,
- Fallunterscheidung,
- rekursiver Fall

Liste aller Lösungen: Beispiel Münzwechsel (2)

FP-4.6

Allgemeines Problem ohne Einschränkung (*); alle Lösungen gesucht
 Entwurfstechnik: **Invariante über Parameter**

Signatur: int list * int list * int -> int list list
 gezahlte verfügbare Rest- Liste aller
 Stücke Münzwerte betrag Lösungen

invariant: Wert gezahlter Stücke + Restbetrag = Wert jeder Lösung.
 invariant: in gezahlten Stücken sind ($\neq 1$ verfügbare Münzwerte) nicht benutzt

Fallunterscheidung für Funktion allChange:

Betrag ganz ausgezahlt eine Lösung
 coins _ 0 = [coins]
 keine Münzwerte mehr verfügbar keine Lösung
 coins [] _ = []

rekursiver Fall:

```
coins c::coinvals amount =
  if amount < 0
```

Betrag so nicht auszahlbar:

```
then []
```

2 Möglichkeiten verfolgen: c benutzen oder c nicht benutzen

```
else allChange (c::coins, c::coinvals, amount-c) @
      allChange (coins, coinvals, amount);
```


Liste aller Lösungen: Beispiel Münzwechsel (3)

Funktion allChange:

```
fun allChange (coins, _, 0) = [coins]
| allChange (coins, [], _) = []
| allChange (coins, c::coinvals, amount) =
  if amount < 0 then []
  else allChange (c::coins, c::coinvals, amount-c) @
        allChange (coins, coinvals, amount);
```

Aufruf und Liste von Lösungen:

```
- allChange ([], euro_coins, 9);

> val it =
  [ [2, 2, 5], [1, 1, 2, 5], [1, 1, 1, 1, 5],
    [1, 2, 2, 2, 2], [1, 1, 1, 2, 2, 2], [1, 1, 1, 1, 1, 2, 2],
    [1, 1, 1, 1, 1, 1, 2],
    [1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1]] : int list list

- allChange ([],[5,2], 3);
> val it = [] : int list list
```

Vorlesung Funktionale Programmierung SS 2013 / Folie 407

Ziele:

Funktion verstehen

in der Vorlesung:

An Beispielen wird erläutert:

- Funktion spannt Lösungsraum vollständig auf.
- Liste aller Lösungen

Matrix-Operationen mit Listen: Transponieren

```
fun headcol [] = []
| headcol ((x::_)::rows) = x :: headcol rows;      ( a | b c )
                                                    ( d | e f )

fun tailcols [] = []
| tailcols ((_:xs)::rows) = xs :: tailcols rows;

fun transp ([]::_) = []
| transp rows =
  headcol rows :: transp (tailcols rows);          ( a d )
                                                    ( b e )
                                                    ( c f )
```

Die Fallunterscheidungen sind nicht vollständig (Warnung).
Es wird angenommen, daß alle Zeilen gleich lang sind.

```
val letterMatr = [ ["a","b","c"], ["d","e","f"] ];
- transp letterMatr;
> val it = [ ["a", "d"], ["b", "e"], ["c", "f"] ] : string list list
```

Vorlesung Funktionale Programmierung SS 2013 / Folie 408

Ziele:

Matrizen als Listen von Listen darstellen

in der Vorlesung:

An Beispielen wird erläutert:

- Listen-Darstellung,
- unvollständige Muster,
- Rekursionsprinzip

Matrix-Operationen mit Listen: Matrix-Multiplikation

Aufgabe schrittweise zerlegen. Reihenfolge der Funktionen dann umkehren:

```
fun matprod (rowsA, rowsB) =
  rowListprod (rowsA, transp rowsB);

fun rowlistprod ([], _) = []
| rowlistprod (row::rows, cols) =
  rowprod (row, cols) :: rowlistprod (rows, cols);

fun rowprod (_, []) = []
| rowprod (row, col::cols) =
  dotprod (row, col) :: rowprod (row, cols);

fun dotprod ([],[]) = 0.0
| dotprod (x::xs,y::ys) = x*y + dotprod(xs,ys);
```

Aufruf und Ergebnis:

```
val numMatr = [[1.0,2.0],[3.0,4.0]]; matprod (numMatr, numMatr);
> val it = [[7.0, 10.0], [15.0, 22.0]] : real list list
```

Vorlesung Funktionale Programmierung SS 2013 / Folie 409

Ziele:

Schrittweise Zerlegung

in der Vorlesung:

Am Beispiel wird erläutert:

- konsequente schrittweise Zerlegung der Aufgabe.

Listenrepräsentation für Polynom-Arithmetik

Polynome in einer Variablen: $a_n x^n + \dots + a_1 x^1 + a_0$

Datenrepräsentation: `real list`: $[a_n, \dots, a_1, a_0]$

besser für dünn besetzte Koeffizientenlisten:

`(int * real) list`: $[(n, a_n), \dots, (1, a_1), (0, a_0)]$

mit: $a_i \neq 0$, eindeutig in Potenzen und fallend sortiert

Beispiel: $(x^4 - x + 3) + (x - 5) = (x^4 - 2)$

`sum [(4, 1.0), (1, ~1.0), (0, 3.0)], [(1, 1.0), (0, ~5.0)]`
liefert `[(4, 1.0), (0, ~2.0)]`

Polynom-Summe:

```
fun sum ([], us) = us
| sum (ts, []) = ts
| sum ((m, a)::ts, (n, b)::us) =
```

die höchsten Potenzen sind verschieden (2 Fälle):

```
if m > n then (m,a)::sum (ts, (n,b)::us)
else if m < n then (n,b)::sum (us, (m,a)::ts)
```

die höchsten Potenzen sind gleich und werden zusammengefasst:

```
else if a+b=0.0 then sum (ts, us)
else (m,a+b)::sum (ts,us);
```

Vorlesung Funktionale Programmierung SS 2013 / Folie 410

Ziele:

Eindeutige Repräsentationen

in der Vorlesung:

An Beispielen wird erläutert:

- Polynomrepräsentationen,
- Problem: real-Vergleich mit 0.0 ist nicht immer exakt,
- Fallunterscheidung,
- Aufwand

Polynom-Arithmetik - Halbierungsverfahren

Polynom-Produkt:

`termprod` multipliziert ein Polynom mit $a \cdot x^m$

```
fun termprod((m,a), []) = []
| termprod((m,a), (n,b)::ts) =
  (m+n, a*b)::termprod((m,a), ts);
```

Multiplikation zweier Polynome mit **Halbierungstechnik**:

```
fun prod([], us) = []
| prod([(m,a)], us) = termprod((m,a), us)
| prod(ts, us) =
  let val k = length ts div 2
  in sum (prod (List.take(ts,k), us),
         prod (List.drop(ts,k), us))
  end;
```

Ebenso mit Halbierungstechnik:

Polynom-Potenz, Polynom-GGT für Polynom-Division

```
- prod (p1, p2);
> val it = [(5, 1.0), (4, ~5.0), (2, ~1.0), (1, 8.0), (0, ~15.0)] :
(int * real) list
```

Vorlesung Funktionale Programmierung SS 2013 / Folie 411

Ziele:

Halbierungstechnik zur Aufwandsreduktion

in der Vorlesung:

Am Beispiel der Polynommultiplikation wird die Halbierungstechnik erläutert.

5. Typen und Module Datentypen mit Konstruktoren

Definition von Datentypen, die verschiedene Wertebereiche zu einem allgemeineren zusammenfassen.

Beispiel: Modellierung britischer Adelspersonen

King	eindeutig, einmalig	
Peer	Rang, Territorium, Erbfolge	z. B. 7th Earl of Carlisle
Knight	Name	z. B. Galahad
Peasant	Name	z. B. Jack Cade

Allgemeines Konzept:

unterscheidbare Vereinigung von Wertebereichen (**discriminated union**).

Verschiedene Techniken in verschiedenen Sprachen:

- Oberklasse u. **spezielle Unterklassen** in objektorientierten Sprachen
- **Record mit Varianten** in Pascal, Modula, Ada
- **Vereinigungstyp** in Algol68
- **struct** mit Unterscheidungskomponente und **union** in C
- **datatype** in SML

Vorlesung Funktionale Programmierung SS 2013 / Folie 501

Ziele:

Typ-Klasse Discriminated Union wiederholen

in der Vorlesung:

An Beispielen wird das Konzept Discriminated Union in mehreren Sprachen erläutert.

Discriminated Union mit Konstruktor-Funktionen

Allgemeines Konzept: discriminated union; In SML realisiert durch:

```
datatype person =
  King
  | Peer of string * string * int
  | Knight of string
  | Peasant of string;
```

Definiert den Typ `person` mit seinen Konstruktoren:

```
King: person
Peer: string * string * int -> person
Knight: string -> person
Peasant: string -> person
```

Notation für Werte:

```
King, Peer ("Earl", "Carlisle", 7), Peasant ("Jack Cade")
```

Fallunterscheidung mit Konstruktoren in Mustern:

```
fun title King = "His Majesty the King"
| title (Peer (deg, terr, _)) = "The ^deg^ of ^tterr"
| title (Knight name) = "Sir ^name"
| title (Peasant name) = name;
```

Jede `datatype`-Definition führt einen **neuen** Typ ein.

Vorsicht beim Verdecken durch Redefinieren!

Vorlesung Funktionale Programmierung SS 2013 / Folie 502

Ziele:

Konstruktor-Funktionen verstehen

in der Vorlesung:

An Beispielen wird erläutert:

- Definition des Vereinigungstyps,
- Definition der Konstruktor-Funktionen,
- Notation von Werten,
- Anwendung der Konstruktor-Funktionen in Mustern.

Verallgemeinerte Datentypkonstruktion

Aufzählungstyp als Vereinigung 1-elementiger Wertebereiche:

```
datatype degree = Duke | Marquis | Earl | Viscount | Baron;
```

Hier sind alle Konstruktoren Konstante.

```
datatype order = LESS | EQUAL | GREATER;
```

verwendet in `String.compare: string * string -> order`

Konstruktion polymorpher Typen:

allgemeines Konzept „Fehlerwert“:

```
datatype 'a option = NONE | SOME of 'a;
```

z. B. in `Real.fromString: string -> real option`

allgemeines Konzept „Wertebereiche paarweise vereinigen“:

```
datatype ('a,'b) union = In1 of 'a | In2 of 'b;
```

z. B. `[(In1 5), (In2 3.1), (In1 2)]`

rekursiv definierte polymorphe Typen:

lineare Listen: `datatype 'a list = nil | :: of ('a * 'a list);`

binäre Bäume: `datatype 'a tree = Lf | Br of 'a * 'a tree * 'a tree;`

allgemeine Bäume: `datatype 'a mtree =
 Mleaf | MBranch of 'a * ('a mtree) list;`

Vorlesung Funktionale Programmierung SS 2013 / Folie 503

Ziele:

Charakteristische Typdefinitionen

in der Vorlesung:

An Beispielen wird erläutert:

- Aufzählungstypen,
- Fehlerwerte in Wertebereichen,
- union-Prinzip ausdrücken,
- Polymorphie ausdrücken.

Binäre Bäume

Typdefinition: `datatype 'a tree = Lf | Br of 'a * 'a tree * 'a tree;`

ein Baum-Wert: `val t2 = Br (2, Br (1, Lf, Lf), Br (3, Lf, Lf));`

Rekursionsmuster: Fallunterscheidung und Rekursion wie in der Typdefinition

```
fun size Lf = 0
  | size (Br (v,t1,t2)) = 1 + size t1 + size t2;
fun preorder Lf = []
  | preorder (Br(v,t1,t2)) = [v] @ preorder t1 @ preorder t2;
```

mit akkumulierendem Parameter:

`preord` stellt der schon berechneten Liste den linearisierten Baum voran:

```
fun preord (Lf, vs) = vs
  | preord (Br(v,t1,t2), vs) = v :: preord (t1, preord (t2, vs));
```

inverse Funktion zu `preorder` baut **balancierten Baum** auf:

```
balpre: 'a list -> 'a tree
fun balpre nil = Lf
  | balpre (x :: xs) =
    let val k = length xs div 2
        in Br(x, balpre (List.take (xs, k)),
              balpre (List.drop (xs, k)))
        end;
```

Vorlesung Funktionale Programmierung SS 2013 / Folie 504

Ziele:

Rekursion auf Bäumen formulieren

in der Vorlesung:

Am Beispiel wird erläutert:

- Rekursionsmuster in Funktionen,
- akkumulierender Parameter in Baum-Rekursion,
- balancierter Baum.

Gekapselte Typdefinition

`abstype` definiert neuen ggf. polymorphen Typ mit Operationen darauf.

Außen sind **nur die Operationen sichtbar**,
nicht aber die **Konstruktorfunktionen** des Datentyps (Implementierung).

Beispiel Wörterbuch mit Binärbaum implementieren:

```
abstype 'a t =
  Leaf | Branch of key * 'a * 'a t * 'a t
with
  exception NotFound of key;
  val empty = Leaf;
  fun lookup (Branch(a,x,t1,t2), b) = ...
  fun insert (Leaf, b, y) = ...
    | insert (Branch(a,x,t1,t2), b, y) = ...
  fun update (Leaf, b, y) = raise NotFound b
    | update (Branch(a,x,t1,t2), b, y) = ...
end;
```

Anwendung:

```
val wb = insert (insert (empty, "Hund", "dog"), "Katze", "cat");
val w = lookup (wb, "Hund");
```

Vorlesung Funktionale Programmierung SS 2013 / Folie 505

Ziele:

Kapselung verstehen

in der Vorlesung:

Am Beispiel wird erläutert:

- Implementierung des Baumes wird verborgen,
- Funktionen auf Bäumen sind aufrufbar.

Zusammenfassung von Typdefinitionen

SML-Konstrukt	Bedeutung	Vergleich mit anderen Sprachen
<code>datatype</code>	neuer Typ mit Konstruktoren	<code>type</code> in Pascal, Klassen in objektorientierten Sprachen
<code>type</code>	anderer Name für existierenden Typ	<code>typedef</code> , <code>#define</code> in C
<code>abstype</code>	neuer Typ mit Operationen aber verborgenen Konstruktoren	ADT mit verborgener Implementierung <code>opaque</code> in Modula, Ada

Modul-Konstrukte:

<code>structure</code>	Modul mit neuem Namensraum	Record in Pascal, Modula-Modul
<code>signature</code>	beschreibt Schnittstelle bzw. Signaturen	Interface in Java, Modula, Header-Dateien in C,
<code>functor</code>	parametrisierte Struktur	Templates in C++, Generics in Ada, Java Interface als Parametertyp

Vorlesung Funktionale Programmierung SS 2013 / Folie 506

Ziele:

Übersicht

in der Vorlesung:

- Rückblick auf `type`, `datatype`, `abstype`;
- Vorschau auf `structure`, `signature`, `functor`

Ausnahmebehandlung (Exceptions)

Motivation:

Partielle Funktion \neq **total** machen ist umständlich:

- Ergebnistyp `'a` ersetzen durch `datatype 'a option = NONE | SOME of 'a;`
- Fallunterscheidung bei jedem Aufruf von \neq
- dasselbe für jede Funktion, die \neq aufruft;
Fehlerwert „durchreichen“ bis er „behandelt“ wird.

SML-Ausnahmen propagieren Fehler von der Auslösestelle auf dem Berechnungsweg bis zur Behandlung - ohne Änderung von Typen und Funktionen.

Deklaration:

```
exception Failure;
exception Fail of string;
ergänzt vordefinierten Typ exn
um eine Variante
```

```
auslösen durch Ausdruck
raise Failure
raise (Fail "too small")
```

Behandlung im Ausdruck

```
(zu prüfender Ausdruck) handle Failure => E1
| Fail (s) => E2
```

Das Ergebnis bestimmt der zu prüfende Ausdruck oder `E1` oder `E2`

Vorlesung Funktionale Programmierung SS 2013 / Folie 507

Ziele:

Ausnahmen in funktionaler Sprache

in der Vorlesung:

Am Beispiel von Folie FP-5.8 wird erläutert:

- strikte Bedeutung von Ausnahmen,
- Deklarieren, Auslösen, Behandeln,
- Anwenden

Beispiel zur Ausnahmebehandlung

FP-5.8

Beispiel Münzwechsel

Eine Lösung wird durch Backtracking im Lösungsraum gesucht.

Wenn ein Zweig keine Lösung liefern kann, wird eine Ausnahme

ausgelöst: `raise Change`

Das Backtracking verweigert am zuletzt durchlaufenen `handle Change`

Gibt es keine Lösung, so bleibt die Ausnahme unbehandelt

`Uncaught exception Change`

```
exception Change;
```

```
fun backChange (coinvals, 0)      = []  
  | backChange ([], amount)      = raise Change  
  | backChange (c::coinvals, amount) =  
    if amount < 0 then raise Change  
    else c :: backChange(c::coinvals, amount - c)  
          handle Change =>  
            backChange(coinvals, amount);
```

© 2011 bei Prof. Dr. Uwe Kastens

Vorlesung Funktionale Programmierung SS 2013 / Folie 508

Ziele:

Ausnahmen in funktionaler Sprache

in der Vorlesung:

Am Beispiel von Folie FP-5.8 wird erläutert:

- strikte Bedeutung von Ausnahmen,
- Deklarieren, Auslösen, Behandeln,
- Anwenden

Module in SML

FP-5.9

Module und Sichtbarkeit von Typen, Varianten:

```
structure:  
Implementierungsmodul  
(vgl. Modula 2);  
kapselt Folge von Deklarationen:  
  
structure Seq =  
  struct  
    exception Empty;  
    fun  
      hd (Cons(x,xf)) = x  
      | hd Nil = raise Empty;  
    ...  
  end;
```

Qualifizierte Namen wie `Seq.hd`
benennen exportierte Größen.

1. Der Modul implementiert eine **Sammlung von Funktionen** zu einem Datentyp;
der Datentyp wird außerhalb des Moduls definiert
`datatype 'a seq = Nil | Cons of 'a ...`
2. Der Modul implementiert einen Datentyp mit Operationen darauf;
die **Implementierung** (Konstrukturfunktionen) soll aussen **qualifiziert sichtbar** sein (`Seq.Cons`);
der Datentyp wird innerhalb des Moduls definiert
`structure Seq = struct
 datatype 'a t = Nil | Cons of ...
 ... exportierte Funktionen
end;`
Namenskonvention: t für **den** exportierten Typ.
3. wie (2) aber mit **verborgener Implementierung** des Datentyps;
Konstrukturfunktionen sind nicht benutzbar:
`structure Bar = struct
 abstype 'a t = Nil | Cons of ...
 with ... exportierte Funktionen
 end
end;`

© 2004 bei Prof. Dr. Uwe Kastens

Vorlesung Funktionale Programmierung SS 2013 / Folie 509

Ziele:

Kapselung von zusammengehörigen Definitionen

in der Vorlesung:

An Beispielen werden die Varianten erläutert.

Schnittstellen

signature:

Schnittstelle von Modulen

definiert eine Folge von typisierten Namen (specifications), die ein Modul mindestens implementieren muss, um die **signature** zu erfüllen; **signature** ist eigenständiges, benanntes Programmobjekt (vgl. Java Interfaces):

```
signature QUEUE =
sig type 'a t
  exception E
  val empty: 'a t
  val enq: 'a t * 'a -> 'a t
...
end;
```

Mehrere Module können eine Schnittstelle unterschiedlich implementieren:

```
structure QueueStd: QUEUE = struct ... end;
structure QueueFast: QUEUE = struct ... end;
```

Man kann auch zu einer existierenden Implementierung eine Definition zufügen, die erklärt, dass sie eine Schnittstelle implementiert (fehlt in Java):

```
structure MyQueue = struct ... end;
...
structure QueueBest: QUEUE = MyQueue;
```

Vorlesung Funktionale Programmierung SS 2013 / Folie 510

Ziele:

Schnittstellen als Programmobjekte

in der Vorlesung:

An Beispielen werden die Konzepte erläutert.

Generische Module

Ein **generischer Modul** (**functor**) hat Strukturen als generische Parameter. (vgl. Klassen als generische Parameter von generischen Definition in C++, Ada, Java)

Formale generische Parameter sind mit einer Signatur typisiert.

Damit können Anforderungen an den aktuellen generischen Parameter formuliert werden, z. B.

- „muss eine Schlangenimplementierung sein“,
- „muss Typ mit Ordnungsrelation sein“.

Garantiert Typ-sichere Benutzung von Modulfunktionen (nicht in C++ und Ada).

Beispiel: **functor** für Breitensuche mit Schlange:

```
functor BreadthFirst (Q: QUEUE) =
struct fun enqlist q xs =
  foldl (fn (x,r)=> Q.enq(r,x)) q xs;
  fun search next x = ...
end;
```

Der Functor wird mit einem zur Signatur passenden Modul **instanziiert**:

```
structure Breadth = BreadthFirst (QueueFast);
```

Vorlesung Funktionale Programmierung SS 2013 / Folie 511

Ziele:

Generische Module verstehen

in der Vorlesung:

An Beispielen wird erläutert:

- Parametrisierung mit Strukturen,
- typisierte, generische Parameter,
- Instanziierung.

Beispiel im Zusammenhang: Wörterbuch-Funktor (1)

Aufzählungstyp (`datatype` mit Konstruktorenfunktionen):

```
datatype order = LESS | EQUAL | GREATER;
```

Typen mit Ordnung als Schnittstelle (`signature`):

```
signature ORDER =
sig
  type t
  val compare: t * t -> order
end;
```

Konkreter Modul (`structure`) für String-Vergleiche:

```
structure StringOrder: ORDER =
struct
  type t = string;
  val compare = String.compare
end;
```

Vorlesung Funktionale Programmierung SS 2013 / Folie 512

Ziele:

Konstrukte im Zusammenhang verstehen

in der Vorlesung:

Am Beispiel wird erläutert:

- Konzept "geordneter Typ" als Paar von Typ und Vergleichsfunktion;
- eine Implementierung des Konzeptes.

Beispiel im Zusammenhang: Wörterbuch-Funktor (2)

Generischer Modul (`functor`) für Wörterbücher implementiert mit binärem Suchbaum:

```
functor Dictionary (Key: ORDER): DICTIONARY =
struct
  type key = Key.t;
  abstype 'a t = Leaf | Bran of key * 'a * 'a t * 'a t
  with exception E of key;
  val empty = Leaf;
  fun lookup (Leaf, b) = raise E b
  | lookup (Bran(a,x,t1,t2), b) =
    (case Key.compare (a, b) of
     GREATER => lookup (t1, b)
     | EQUAL => x
     ...
    )
  ...
end
end;
```

Instanziierung des Funktors für einen Wörterbuch-Modul mit String-Schlüsseln:

```
structure StringDict = Dictionary (StringOrder);
```

Erzeugung und Benutzung eines Wörterbuches:

```
val dict = StringDict.update(..(StringDict.empty, "Kastens", 6686));
val tel = StringDict.lookup (dict, "Kastens");
```

Vorlesung Funktionale Programmierung SS 2013 / Folie 513

Ziele:

Konstrukte im Zusammenhang verstehen

in der Vorlesung:

Am Beispiel wird erläutert:

- Benutzung des generischen Parameters im Funktor,
- Instanziierung mit einem passenden Modul,
- Benutzung des instanziierten Funktors.

6. Funktionen als Daten, Übersicht

Orthogonales Typsystem: Funktionen sind beliebig mit anderen Typen kombinierbar

Notation für Funktionswerte (Lambda-Ausdruck):

```
fn (z,k) => z*k
```

Datenstrukturen mit Funktionen als Komponenten:

z. B. Suchbaum für Funktionen

Funktionale, Funktionen höherer Ordnung (higher order functions, HOF):

haben **Funktionen als Parameter oder als Ergebnis**

Berechnungsschemata:

Funktion als Parameter abstrahiert Operation im Schema,
wird bei Aufruf des Schemas konkretisiert

```
foldl (fn (z,k) => z*k, [2,5,1], 1);
```

 (hier noch ohne Currying)

schrittweise Parametrisierung (Currying):

Funktion als Ergebnis bindet ersten Parameter,
nützliche Programmieretechnik, steigert Wiederverwendbarkeit

```
val chorner = fn l => fn x => foldl (fn (z,k) => z*x+k, 1, 0);
```

nicht-endliche Datenstrukturen (Ströme, lazy evaluation), (Kapitel 7):

Funktionen als Komponenten von Datenstrukturen,
z. B. Funktion, die den Rest einer Liste liefert

```
datatype 'a seq = Nil | Cons of 'a * (unit -> 'a seq)
```

Vorlesung Funktionale Programmierung SS 2013 / Folie 601

Ziele:

Kontexte für Funktionen als Daten

in der Vorlesung:

Die Kontexte werden an Beispielen erläutert.

Notation von Lambda-Ausdrücken

Auswertung eines Lambda-Ausdruckes

liefert eine Funktion, als Datum, unbenannt.

Notation:

```
fn ParameterMuster => Ausdruck
```

```
fn (z,k) => z*k
```

```
fn (x, y) => Math.sqrt (x*x + y*y)
```

mit Fallunterscheidung:

```
fn Muster1 => Ausdruck1
```

```
| Muster2 => Ausdruck2
```

```
| ...
```

```
| Mustern => Ausdruckn
```

```
fn nil => true
```

```
| (_:_) => false
```

Anwendungen von Lambda-Ausdrücken:

```
linsert (1, fn (z,k) => z*x+k, 0)
```

```
(fn (z,k) => z*k) (a, b)
```

```
if b then fn (z,k) => z*k
```

```
else fn (z,k) => z+k
```

```
[fn (z,k) => z*k, fn (z,k) => z+k]
```

```
val null = fn nil => true
```

```
| (_:_) => false;
```

```
fun Comp (f, g) = fn x => f (g x);
```

Vorlesung Funktionale Programmierung SS 2013 / Folie 602

Ziele:

Notation und Anwendung wiederholen

in der Vorlesung:

An den Beispielen werden Notation und Anwendung erläutert.

Currying

Haskell B. Curry: US-amerikanischer Logiker 1900-1982, Combinatory Logic (1958); Moses Schönfinkel, ukrainischer Logiker, hat die Idee schon 1924 publiziert:

Funktionen **schrittweise parametrisieren statt vollständig mit einem Parametertupel.**
abstraktes Prinzip für eine n-stellige Funktion:

Tupelform:

Signatur: $gn: ('t_1 * 't_2 * \dots * 't_n) \rightarrow 'r$
 Funktion: `fun gn (p1, p2, ..., pn) = Ausdruck über p1, ..., pn`
 Aufrufe: `gn (a1, a2, ..., an)` liefert Wert vom Typ 'r

ge-curried:

Signatur: $cgn: 't_1 \rightarrow ('t_2 \rightarrow \dots \rightarrow ('t_n \rightarrow 'r) \dots)$
 Funktion: `fun cgn p1 p2 ... pn = Ausdruck über p1, ..., pn`
 Aufruf: liefert Wert vom Typ
`(cgn a1 a2 ... an)` 'r
`(cgn a1 a2 ... an-1)` 't_n-'r
 ...
`(cgn a1)` 't₂-(...('t_n-'r)...)

Ergebnisfunktionen tragen die schon gebundenen Parameter in sich.

Funktion voll-parametrisiert entwerfen - teil-parametrisiert benutzen!

Vorlesung Funktionale Programmierung SS 2013 / Folie 603

Ziele:

Currying-Prinzip verstehen

in der Vorlesung:

An Beispielen wird erläutert:

- Prinzip Currying,
- Signaturvergleich,
- Notation, Kurznotation,
- zusätzliche Möglichkeiten,
- Parameter in der Ergebnisfunktion gebunden.

Currying: Beispiele

Parametertupel:

```
fun prefix (pre, post) = pre ^ post;
Signatur: string * string -> string
```

ge-curried:

```
lang: fun prefix pre = fn post => pre ^ post;
kurz: fun prefix pre post = pre ^ post;
Signatur: string -> (string -> string)
gleich: string -> string -> string
```

Erster Parameter (**pre**) ist in der Ergebnisfunktion gebunden.

Anwendungen:

```
val knightify = prefix "Sir ";
val dukify = prefix "The Duke of ";
knightify "Ratcliff";
(prefix "Sir ") "Ratcliff";
prefix "Sir " "Ratcliff"; linksassoziativ
```

auch rekursiv: **x** oder **n** ist in der Ergebnisfunktion gebunden

```
fun repxlist x n = if n=0 then [] else x :: repxlist x (n-1);
fun repnlist n x = if n=0 then [] else x :: repnlist (n-1) x;
(repxlist 7); (repnlist 3);
```

Vorlesung Funktionale Programmierung SS 2013 / Folie 603a

Ziele:

Currying am Beispiel verstehen

in der Vorlesung:

An Beispielen wird erläutert:

- Prinzip Currying,
- Signaturvergleich,
- Notation, Kurznotation,
- zusätzliche Möglichkeiten,
- Parameter in der Ergebnisfunktion gebunden.

Funktionen in Datenstrukturen

Liste von Funktionen:

```
val titlefns =
  [prefix "Sir ",
   prefix "The Duke of ",
   prefix "Lord "]      :(string -> string) list
```

```
hd (tl titlefns) "Gloucester";
```

Suchbaum mit (string * (real -> real)) Paaren:

```
val fntree =
  Dict.insert
    (Dict.insert
      (Dict.insert
        (Lf, "sin", Math.sin),
         "cos", Math.cos),
       "atan", Math.atan);
```

```
Dict.lookup (fntree, "cos") 0.0;
```

Vorlesung Funktionale Programmierung SS 2013 / Folie 604

Ziele:

Illustration durch Beispiele

in der Vorlesung:

Die Beispiele werden erläutert.

Currying als Funktional

Funktional: Funktionen über Funktionen; Funktionen höherer Ordnung (HOF)

secl, secr (section):

2-stellige Funktion in Curry-Form wandeln; dabei den linken, rechten **Operanden binden**:

```
fun secl x f y = f (x, y);
'a -> ('a * 'b -> 'c) -> 'b -> 'c
```

```
fun secr f y x = f (x, y);
('a * 'b -> 'c) -> 'b -> 'a -> 'c
```

Anwendungen:

```
fun power (x, k):real =if k = 1 then x else
                      if k mod 2 = 0then  power (x*x, k div 2)
                      else x *power (x*x, k div 2);
```

```
val twoPow = secl 2.0 power;          int -> real
```

```
val pow3 = secr power 3;             real -> real
```

```
map (1, secr power 3);
```

```
val knightify = (secl "Sir " op^);    string -> string
```

op^ bedeutet infix-Operator ^ als Funktion

Vorlesung Funktionale Programmierung SS 2013 / Folie 605

Ziele:

Umgang mit Funktionalen

in der Vorlesung:

An Beispielen wird erläutert:

- Signatur von Funktionen manipulieren,
- Parameterwerte in Funktionen binden,
- Einsatz von Funktionalen.

Komposition von Funktionen

Funktional `cmp` verknüpft Funktionen `f` und `g` zu deren Hintereinanderausführung:

```
fun cmp (f, g) x = (f (g x));
```

Ausdrücke mit **Operatoren**, die Funktionen zu neuen **Funktionen verknüpfen**,

2-stelliger **Operator** `o` statt 2-stelliger Funktion `cmp`:

```
infix o;
fun (f o g) x = f (g x);      ('b->'c) * ('a->'b) -> 'a -> 'c
```

Funktionen nicht durch **Verknüpfung von Parametern** in Lambda-Ausdrücken definieren:

```
fn x => 2.0 / (x - 1.0)
```

sondern durch **Verknüpfung von Funktionen** (algebraisch) berechnen:

```
(secl 2.0 op/) o (secl op- 1.0)
```

Potenzieren von Funktionen $f^n(x)$:

```
fun repeat f n x = if n > 0 then repeat f (n-1) (f x) else x;
repeat: ('a->'a) -> int -> 'a -> 'a
```

Aufrufe:

```
(repeat (secl op/ 2.0) 3 800.0);      (repeat tl 3 [1,2,3,4]);
(repeat (secl op/ 2.0) 3);           (repeat tl 3);
(repeat (secl op/ 2.0));            (repeat tl);
```

[John Backus: Can Programming Be Liberated from the von Neumann Style? A functional Style and Its Algebra of Programs; 1977 ACM Turing Award Lecture; CACM, vol. 21, no. 8, 1978]

Vorlesung Funktionale Programmierung SS 2013 / Folie 606

Ziele:

Ausdrücke über Funktionen

in der Vorlesung:

An Beispielen wird erläutert:

- Funktionen durch Funktionale verknüpfen

Kombinatoren

Kombinator: Funktion ohne freie Variable

Kombinatorischer Term T:

T ist ein Kombinator oder T hat die Form (T_1, T_2) und T_i sind kombinatorische Terme

Kombinatorische Terme dienen

zur **Verknüpfung** und zu algebraischer **Transformation** von Funktionen,

zur Analyse und zum **Beweis** von Programmen

David Turner (britischer Informatiker) hat 1976 gezeigt, dass **alle Funktionen des Lambda-Kalküls** durch die klassischen Kombinatoren s und k darstellbar sind.

klassische Kombinatoren S K I:

```
fun I x = x;           Identitätsfunktion           'a -> 'a
fun K x y = x;        bildet Konstante Fkt.         'a -> 'b -> 'a
fun S x y z = x z (y z); wendet x auf y an, nach Einsetzen von z in beide
                      ('a -> 'b -> 'c) -> ('a -> 'b) -> 'a -> 'c
```

I entspricht $s \ k \ k$ denn $((s \ k \ k) \ u) = (s \ k \ k \ u) = (k \ u \ (k \ u)) = u$

Beispiel:

Der Lambda-Ausdruck $(\lambda x (\lambda y (x \ y)))$

kann in $(s \ (k \ (s \ I)) \ (s \ (k \ k) \ I))$ transformiert werden.

Vorlesung Funktionale Programmierung SS 2013 / Folie 606a

Ziele:

Klassische Kombinatoren verstehen

in der Vorlesung:

Definition und Bedeutung der Kombinatoren wird erläutert (für Spezialisten).

Reihenberechnung als Schema

Allgemeine Formel für eine **endliche Reihe**: $\sum_{i=0}^{m-1} f(i)$

```
fun summation f m =
  let fun sum (i, z):real =          akkumulierende Hilfsfunktion
        if i=m then z else sum (i+1, z + (f i))
      in sum (0, 0.0) end;
```

Signatur: (int->real) -> int -> real

Aufruf `summation (fn k => real(k*k)) 5;` liefert 30

Doppelsumme:

$\sum_{i=0}^{m-1} \sum_{j=0}^{n-1} g(i,j)$ summation als Parameter von summation:

```

      Bindung
      |
summation(fn i => summation (fn j => g(i,j)) n) m
      int->real          int->real
```

einfacher `h i j` statt `g(i,j)`: `summation (fn i => summation (h i) n) m;`

Kombination von Funktionen, Konversion nach `real`: `summation (Math.sqrt o real);`

Summe konstanter Werte; Kombinator `κ` für konstante Funktion: `summation (κ 7.0) 10;`

Vorlesung Funktionale Programmierung SS 2013 / Folie 607

Ziele:

Currying im Berechnungsschema anwenden

in der Vorlesung:

Das Beispiel wird erläutert:

- Schema,
- Currying: Funktion erzeugen statt auswerten,
- Currying vereinfacht Kombination von Funktionen

Funktionale für Listen: map

Liste elementweise mit einer Funktion abbilden:

```
map f [x1,...,xn] = [f x1,..., f xn]
```

```
fun map f nil = nil
| map f (x::xs) = (f x) :: map f xs;
Signatur: ('a -> 'b) -> 'a list -> 'b list
```

Anwendungen:

```
map size ["Hello", "World!"];
map (secl 1.0 op/) [0.1, 1.0, 5.0];
```

für 2-stufige Listen (setzt `map` in Curry-Form voraus!):

```
map (map double) [[1], [2, 3]];
```

statt `map f (map g l)` besser `map (f o g) l`

Matrix transponieren:

```
fun transp (nil::_) = nil
| transp rows =
  map hd rows :: transp (map tl rows);
```

Vorlesung Funktionale Programmierung SS 2013 / Folie 608

Ziele:

Berechnungsmuster als Funktionale

in der Vorlesung:

An Beispielen wird erläutert:

- Aufrufe in Curry-Form,
- (map f) als Listentransformer,
- auch mehrstufige Listen möglich - wegen Currying,
- (map f l) aufgerufenes Funktional in transpose.

Funktionale für Listen: Filter

Schema: Prädikatfunktion wählt Listenelemente aus:

```
fun filter pred nil      = nil
  | filter pred (x::xs) = if pred x then x :: (filter pred xs)
                        else (filter pred xs);
```

Anwendungen:

```
filter (fn a => (size a) > 3) ["Good", "bye", "world"];
fun isDivisorOf n d = (n mod d) = 0;
filter (isDivisorOf 360) [24, 25, 30];
```

Mengendurchschnitt (`mem` ist auf nächster Folie definiert):

```
fun intersect xs ys = filter (secl op mem) ys xs;
```

Variationen des Filterschemas:

```
val select = filter;
fun reject f = filter ((op not) o f);
```

```
fun takewhile pred nil = nil
  | takewhile pred (x::xs) = if pred x then x::(takewhile pred xs)
                             else nil;
```

```
takewhile isPos [3, 2, 1, 0, ~1, 0, 1];
```

```
fun dropwhile ... entsprechend
```

Vorlesung Funktionale Programmierung SS 2013 / Folie 609

Ziele:

Filter als Funktionale verstehen

in der Vorlesung:

An Beispielen wird erläutert:

- Filterprinzip,
- Durchschnitt zweier Mengen als Listen,
- Filter berechnen

Funktionale für Listen: Quantoren

Existenz und All-Quantor:

```
fun exists pred nil      = false
  | exists pred (x::xs) = (pred x) orelse (exists pred xs);
fun all pred nil         = true
  | all pred (x::xs)     = (pred x) andalso (all pred xs);
```

Member-Operator:

```
infix mem;
fun x mem xs = exists (secl op= x) xs;
```

Disjunkte Listen?

```
fun disjoint xs ys = all (fn x => all (fn y => y<>x) ys) xs;
```

oder:

```
fun disjoint xs ys = all (fn x => (all (secl op<> x) ys)) xs;
```

Quantoren-Funktionale für Listen von Listen:

```
exists (exists pred)      z. B. exists (exists (secl 0 op=))
filter (exists pred)      z. B. filter (exists (secl 0 op=))
takewhile (all pred)      z. B. takewhile (all (secl op> 10))
```

Vorlesung Funktionale Programmierung SS 2013 / Folie 610

Ziele:

Quantoren als Funktionale verstehen

in der Vorlesung:

An Beispielen wird erläutert:

- Quantoren über Listen,
- Member-Operator mit Quantor definiert,
- Listenvergleich,
- Quantoren für Listen von Listen.

Funktionale verknüpfen Listenwerte

Listenelemente mit 2-stelliger Funktion f verknüpfen:

```
foldl f e [x1, ..., xn] = f(xn, ... f(x2, f(x1, e))...)
foldr f e [x1, ..., xn] = f(x1, ... f(xn-1, f(xn, e))...)
```

`foldl` verknüpft Elemente sukzessive vom ersten zum letzten.

`foldr` verknüpft Elemente sukzessive vom letzten zum ersten.

```
fun foldl f e nil = e           akk. Parameter
|   foldl f e (x::xs) = foldl f (f(x, e)) xs;
fun foldr f e nil = e
|   foldr f e (x::xs) = f(x, foldr f e xs);
```

Signatur: ('a * 'b -> 'b) -> 'b -> 'a list -> 'b

Beispiel: `val sum = foldl op+ 0;`

Verknüpfungsreihenfolge bei `foldl` und `foldr`:

```
val difl = foldl op- 0;      difl [1,10]; ergibt 9
val difr = foldr op- 0;      difr [1,10]; ergibt ~9
```

Horner-Schema in Curry-Form:

```
fun horner l x = foldl (fn (h,a) => a*x+h) 0.0 l;
```

Liste umkehren: `fun reverse l = foldl op:: nil l;`

Menge aus Liste erzeugen: `fun setof l = foldr newmem [] l;`
`setof [1,1,2,4,4];`

Vorlesung Funktionale Programmierung SS 2013 / Folie 611

Ziele:

Funktional Fold anwenden können

in der Vorlesung:

An Beispielen wird erläutert:

- Verknüpfungsarten `foldl`, `foldr`
- Anwendungen in Curry-Form

Werte in binären Bäumen

```
datatype 'a tree = Lf | Br of 'a * 'a tree * 'a tree
```

Schema:

Für jedes Blatt einen Wert e einsetzen und
 an inneren Knoten Werte mit 3-stelliger Funktion verknüpfen (vergl. `foldr`):

```
fun treefold f e Lf = e
|   treefold f e (Br (u,t1,t2)) =
    f (u, treefold f e t1, treefold f e t2);
```

Anwendungen

Anzahl der Knoten:

```
treefold (fn (_, c1, c2) => 1 + c1 + c2) 0 t;
```

Baumtiefe:

```
treefold (fn (_, c1, c2) => 1 + max (c1, c2)) 0 t;
```

Baum spiegeln:

```
treefold (fn (u, t1, t2) => Br (u, t2, t1)) Lf t;
```

Werte als Liste in Preorder (flatten):

```
treefold (fn (u, l1, l2) => [u] @ l1 @ l2) nil t;
```

Vorlesung Funktionale Programmierung SS 2013 / Folie 612

Ziele:

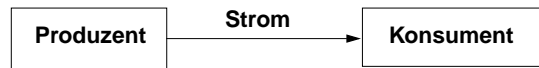
Fold-Prinzip für Bäume verstehen

in der Vorlesung:

An Beispielen wird das Prinzip erläutert.

7. Unendliche Listen (lazy lists), Übersicht

Paradigma: Strom von Werten
Produzent und Konsument getrennt entwerfen
Konsument entscheidet über Abbruch (Terminierung)



Beispiele: Zahlenfolge summieren
 iteratives Näherungsverfahren Abbruchkriterium
 Zufallszahlen generieren benutzen
 Lösungsraum aufzählen über Lösung entscheiden

Technik:

Liste: Paar aus Element und Rest
 Strom: Paar aus Element und **Funktion, die den Rest liefert** (parameterlose Funktion)

```
datatype 'a seq = Nil | Cons of 'a * (unit -> 'a seq);
```

```
fun Head (Cons (x, xf)) = x
  | Head Nil           = raise Empty;
fun Tail (Cons (x, xf)) = xf ()
  | Tail Nil           = raise Empty;
```

Vorlesung Funktionale Programmierung SS 2013 / Folie 701

Ziele:

Prinzip unendlicher Listen verstehen

in der Vorlesung:

An Beispielen wird erläutert:

- Paradigmen "lazy vs. eager" in Berechnungen,
- Paradigma "lazy" in Listen,
- Datentyp dazu,
- Funktionen darauf.

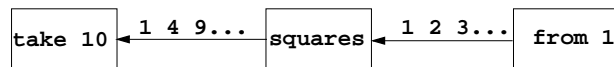
Beispiele für Stromfunktionen (1)

Produzent eines Zahlenstromes: `int -> int seq`
`fun from k = Cons (k, fn()=> from (k+1));`

Konsument: erste n Elemente als Liste: `'a seq * int -> 'a list`
`fun take (xq, 0) = []`
`| take (Nil, n) = raise Empty`
`| take (Cons(x, xf), n) = x :: take (xf (), n - 1);`

Transformer: `int seq -> int seq`
`fun squares Nil = Nil`
`| squares (Cons (x, xf)) = Cons (x * x, fn() => squares (xf()));`

```
take                    (squares                    (from 1), 10);
```



Vorlesung Funktionale Programmierung SS 2013 / Folie 702

Ziele:

Stromfunktionen entwerfen können

in der Vorlesung:

An Beispielen wird erläutert:

- Struktur von Stromfunktionen,
- Klassifikation: Produzent, Konsument, Transformer,
- Benutzung der Funktion im seq-Paar

Beispiele für Stromfunktionen (2)

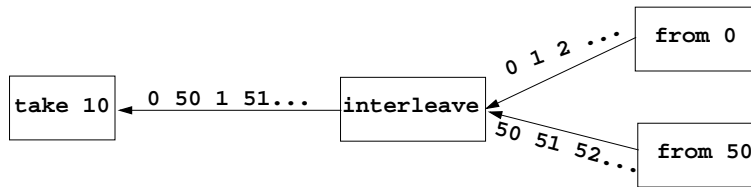
zwei Ströme addieren:

```
int seq * int seq -> int seq
fun add (Cons(x, xf), Cons(y, yf)) =
  Cons (x+y, fn() => add (xf(), yf()))
|   add _ = Nil;
```

zwei Ströme verzahnen:

```
'a seq * 'a seq -> 'a seq
fun interleave (Nil, yq) = yq
|   interleave (Cons(x, xf), yq) =
  Cons (x, fn () => interleave(yq, xf ()));
```

```
take (interleave (from 0, from 50), 10)
```



Ziele:

Kombination von Strömen verstehen

in der Vorlesung:

An Beispielen wird erläutert:

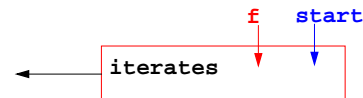
- Zusammensetzen von Strömen

Funktionale für Ströme

Generator-Schema: wiederholte Anwendung einer Funktion auf einen Startwert

```
fun iterates f x = Cons (x, fn() => iterates f (f x));
  ('a -> 'a) -> 'a -> 'a seq
```

```
fun from k = iterates (secl 1 op+) k;
```



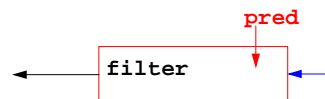
Transformer-Schema:

```
('a -> 'b) -> 'a seq -> 'b seq
fun map f Nil = Nil
|   map f (Cons(x,xf)) = Cons (f x, fn () => map f (xf()));
```



Filter-Schema:

```
('a -> bool) -> 'a seq -> 'a seq
fun filter pred Nil = Nil
|   filter pred (Cons(x,xf)) =
  if pred x then Cons (x, fn()=> filter pred (xf()))
  else filter pred (xf());
```



Ziele:

Muster für Stromfunktionen

in der Vorlesung:

An Beispielen wird erläutert:

- Muster,
- Parametrisierung,
- Anwendung.

Stromfunktionen im Modul Seq

Funktionen für Ströme sind im Modul Seq zusammengefasst:

```
Seq.hd, Seq.tl, Seq.null, Seq.take, Seq.drop, Seq.@,
Seq.interleave, Seq.map, Seq.filter, Seq.iterates,
Seq.from, Seq.fromlist, Seq.toList
```

Beispiel: Strom von Zufallszahlen:

```
localval a = 16807.0 and m = 2147483647.0

fun nextRand seed =
  let val t = a*seed
      in t - m * real (Real.floor(t/m))
      end

in fun randseq s = Seq.map(secr op/ m)
   (Seq.iterates nextRand (real s))
end;
```



Vorlesung Funktionale Programmierung SS 2013 / Folie 706

Ziele:

Modul anwenden

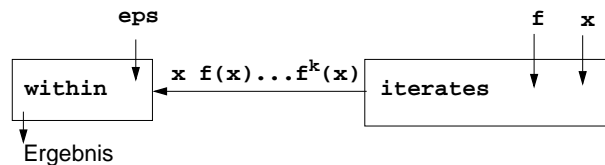
in der Vorlesung:

Am Beispiel wird erläutert:

- Funktionale des Moduls einsetzen,
- Komplexe Stromfunktion entwerfen.

Ströme zusammensetzen

Schema: Konvergenzabbruch für iterierte Funktion



Beispiel: Quadratwurzel iterativ berechnen:

```
fun nextApprox a x = (a/x + x) / 2.0;

fun within (eps:real) (Cons(x,xf)) =
  let val Cons (y,yf) = xf()
      in if Real.abs (x-y) < eps
         then y
         else within eps (Cons (y,yf))
      end;

fun qroot a =
  within 1E-12 (Seq.iterates (nextApprox a) 1.0);
```

Vorlesung Funktionale Programmierung SS 2013 / Folie 707

Ziele:

Schema: Konvergenzabbruch verstehen

in der Vorlesung:

Am Beispiel wird das Schema erläutert.

Ströme rekursiv zusammensetzen

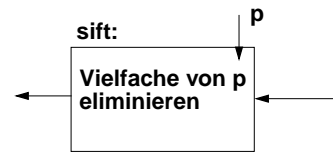
FP-7.8

```

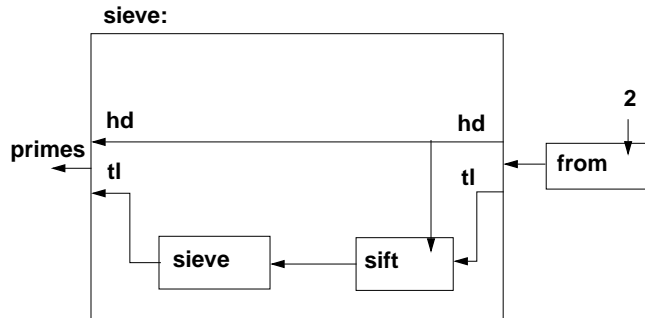
fun sift p =
  Seq.filter (fn n => n mod p <> 0);

fun sieve (Cons(p,nf)) =
  Cons (p, fn() => sieve (sift p (nf())));

val primes = sieve (Seq.from 2);
Seq.take (primes, 25);
  
```



Primzahlen mit dem Sieb des Eratosthenes berechnen:



© 2014 bei Prof. Dr. Uwe Kastens

Vorlesung Funktionale Programmierung SS 2013 / Folie 708

Ziele:

Rekursion mit Strömen verstehen

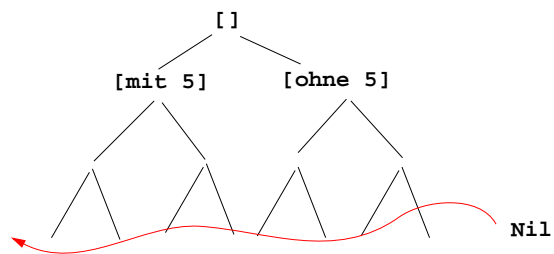
in der Vorlesung:

Am Beispiel wird die Rekursion erläutert.

Strom aller Lösungen im Baum-strukturierten Lösungsraum

FP-7.9

Beispiel **Münzwechsel**: Strom von Lösungen der Form [5, 2, 1, 1] berechnen



- endliche Zahl von Lösungen: abbrechender Strom
- **Listenkonkatenation @** darf **nicht in Stromkonkatenation Seq.@** geändert werden! Strom würde dann **vollständig ausgewertet!**
- Funktion akkumuliert Strom elementweise
- akkumulierender Parameter berechnet Restfunktion des Stromes mit **Cons (x, xf)**

© 2005 bei Prof. Dr. Uwe Kastens

Vorlesung Funktionale Programmierung SS 2013 / Folie 709

Ziele:

Prinzip Strom von Lösungen verstehen

in der Vorlesung:

Am Beispiel wird das Prinzip erläutert.

Beispiel Münzwechsel mit Strömen

Signatur:

```
int list * int list * int * (unit -> int list seq) -> int list seq
```

Funktionsdefinition seqChange:

fun

neue Lösung coins in den Strom geben:

```
seqChange (coins, coinvals, 0, coinsf) = Seq.Cons (coins, coinsf)
```

ist keine Lösung, Strom bleibt unverändert:

```
| seqChange (coins, [], amount, coinsf) = coinsf ()
```

```
| seqChange (coins, c::coinvals, amount, coinsf) =
  if amount < 0
```

ist keine Lösung, Strom bleibt unverändert:

```
  then coinsf ()
```

```
  else seqChange
```

erster Zweig „mit Münze c“:

```
    (c::coins, c::coinvals, amount-c,
```

zweiter Zweig „ohne Münze c“, lazy:

```
      fn() => seqChange (coins, coinvals, amount, coinsf));
```

Aufruf mit abbrechender Rest-Funktion:

```
seqChange ([], gb_coins, 99, fn () => Seq.Nil);
```

liefert die erste Lösung im Paar Seq.Cons ([...], f); die nächste mit Seq.tl it

Vorlesung Funktionale Programmierung SS 2013 / Folie 710

Ziele:

Rekursive Programmierung mit Strömen verstehen

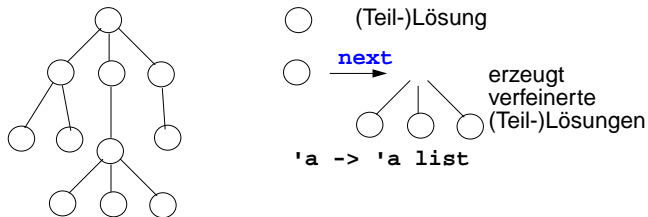
in der Vorlesung:

Am Beispiel wird erläutert:

- Verlängern des Stromes,
- Schrittweise Auswerten des Stromes,
- - dabei wird die Funktion seqChange weiter berechnet!

Funktional für Tiefensuche in Lösungsbäumen

- Strom entkoppelt Erzeuger und Verwender der Lösungen
- Funktional bestimmt die Suchstrategie des Erzeugers
- Die Aufgabe wird durch **next** und **pred** bestimmt



DFS Tiefensuche: effizient; aber terminiert nicht bei unendlichen Teilbäumen

Prädikat **pred** entscheidet, ob eine Lösung vorliegt:

```
fun depthFirst (next, pred) root =
  let fun dfs [] = Nil
      | dfs (x::xs) =
          if pred x
          then Cons (x, fn () => dfs ((next x) @ xs))
          else dfs ((next x) @ xs)
  in dfs [root] end;
```

Keller:

Vorlesung Funktionale Programmierung SS 2013 / Folie 711

Ziele:

Verallgemeinerung der Lösungssuche

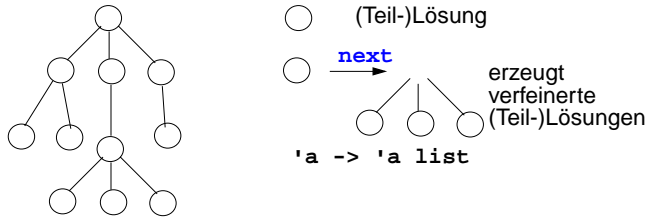
in der Vorlesung:

Die drei Abstraktionen werden erläutert:

- Erzeuger-Verbraucher: Strom
- Suchreihenfolge: Funktional
- Anwendungsaufgabe: Parameter

Funktional für Breitensuche in Lösungsbäumen

- Strom entkoppelt Erzeuger und Verwender der Lösungen
- Funktional bestimmt die Suchstrategie des Erzeugers
- Die Aufgabe wird durch `next` und `pred` bestimmt



BFS Breitensuche: vollständig; aber speicheraufwendig:

```
fun breadthFirst (next, pred) root =
  let fun bfs [] = Nil
      | bfs (x::xs) =
          if pred x
          then Cons (x, fn () => bfs(xs @ next x))
          else bfs (xs @ next x)
      in bfs [root] end;
```

Schlange:

Vorlesung Funktionale Programmierung SS 2013 / Folie 712

Ziele:

Verallgemeinerung der Lösungssuche

in der Vorlesung:

Die drei Abstraktionen werden erläutert:

- Erzeuger-Verbraucher: Strom
- Suchreihenfolge: Funktional
- Anwendungsaufgabe: Parameter

Funktionale anwenden für Münzwechsel

Knoten des Lösungsbaumes sind Tripel

(ausgezahlte Münzen, verfügbare Münzwerte, zu zahlender Betrag):

```
fun predCoins (paid, coinvals, 0) = true
  | predCoins _ _ _ = false;

fun nextCoins (paid, coinvals, 0) = []
  | nextCoins (paid, nil, amount) = []
  | nextCoins (paid, c::coinvals, amount) =
    if amount < 0
    then []
    else [ (c::paid, c::coinvals, amount-c),
           (paid, coinvals, amount)];

val euro_coins = [200, 100, 50, 20, 10, 5, 2, 1];
val coins52Dep = depthFirst (nextCoins, predCoins) ([],[5,2], 30);
val coins52Bre = breadthFirst (nextCoins, predCoins) ([],[5,2], 30);
val coinsEuroBre = ([], euro_coins, 30);
```

Vorlesung Funktionale Programmierung SS 2013 / Folie 712a

Ziele:

Beispiel für Suche im Lösungsraum

in der Vorlesung:

Das Beispiel wird erläutert und am Rechner vorgeführt.

Funktionale anwenden erzeugung von Palindromen

Ein Knoten des Lösungsbaumes ist eine **Liste von Zeichen**:

```
fun nextChar l = ["A"::l, "B"::l, "C"::l];
fun isPalin l = (l = rev l);
```

```
val palinABCBre = breadthFirst (nextChar, isPalin) [];
val palinABCDep = depthFirst (nextChar, isPalin) [];
```

Vorlesung Funktionale Programmierung SS 2013 / Folie 712b

Ziele:

Beispiel für Suche im Lösungsraum

in der Vorlesung:

Das Beispiel wird erläutert und am Rechner vorgeführt.

Weiter verzögerte Auswertung

Datentyp lazySeq berechnet ein Paar erst, wenn es gebraucht wird:

```
datatype 'a lazySeq = LazyNil | LazyCons of unit -> 'a * 'a lazySeq
fun from k = LazyCons (fn () => (k, from (k + 1)));
```

```
fun take (xq, 0) = nil
  | take (LazyNil, n) = raise Seq.Empty
  | take (LazyCons xf, n) = let val (x, xt) = xf ()
                           in x :: take (xt, n - 1)
                           end;
```

noch weiter verzögert: leerer oder nicht-leerer Strom wird erst entschieden, wenn nötig.

```
datatype 'a seqNode = llNil | llCons of 'a * 'a llSeq;
datatype 'a llSeq = Seq of unit -> 'a seqNode;
```

Vorlesung Funktionale Programmierung SS 2013 / Folie 713

Ziele:

Laziness steigern

in der Vorlesung:

Am Beispiel wird das Prinzip erläutert.

8. Lazy Evaluation

eager

vs.

lazy

allgemeines Prinzip (auch in der SWT):

Erst werden **alle evtl. benötigten Werte** berechnet, dann die Operation darauf ausgeführt.

Strikte Auswertung: Wenn ein Operand `bottom` liefert (nicht terminiert), dann liefert auch der Ausdruck `bottom`.

Eine **Berechnung wird erst dann** ausgeführt, **wenn ihr Ergebnis benötigt** wird.

Zusammengesetzte Ergebnisse werden **nur so tief wie nötig ausgewertet**.

Mehrfach benötigte **Ergebnisse** werden nur einmal berechnet und dann **wiederverwendet**.

Parameterübergabe: call.by-value

call-by-name, call-by-need

Datenstrukturen: Listen

Ströme

Sprachsemantik: SML, Lisp

Haskell, Miranda

Vorlesung Funktionale Programmierung SS 2012 / Folie 801

Ziele:

Übersicht zum Begriff Lazy

in der Vorlesung:

Wiederholung zu früheren Folien

Einführung in Notationen von Haskell

Definitionen von Funktionen:

```
add :: Int -> Int -> Int
add x y = x + y
```

vorangestellte Signatur ist guter Stil,
aber nicht obligatorisch

```
inc1 :: Int -> Int
inc1 = add 1
```

```
inc2 :: Int -> Int
inc2 = (+2)
```

entspricht `(secr op+ 2)` in SML

```
sub :: Int -> Int -> Int
sub = \x y -> x - y
```

Lambda-Ausdruck in Haskell

Funktionen über Listen:

```
lg :: [a] -> Int
lg [] = 0
lg (_:xs) = 1 + lg xs
```

```
xmap f [] = []
xmap f (x:xs) = (f x) : (xmap f xs)
```

Aufruf z. B.: `xmap (+2) [1,2,3]`

```
quicksort [] = []
quicksort (x:xs) =
  quicksort [y | y <- xs, y < x] ++
  [x] ++
  quicksort [y | y <- xs, y >= x]
```

Vorlesung Funktionale Programmierung SS 2012 / Folie 802

Ziele:

Einfache Haskell-Funktionen lesen können

in der Vorlesung:

An den Beispielen werden die Notationen erläutert.

Lazy-Semantik in Haskell

FP-8.3

Die Semantik von Haskell ist **konsequent lazy**,
nur elementare Rechenoperationen (+, *, ...) werden strikt ausgewertet.

Beispiele:

```
inf = inf
```

ist wohldefiniert; aber die Auswertung würde nicht terminieren.

```
f x y = if x == 0 then True else y
```

Parameterübergabe call-by-need:

```
f 0 inf                liefert True
```

```
f inf False           terminiert nicht, liefert bottom
```

Vorlesung Funktionale Programmierung SS 2012 / Folie 803

Ziele:

Lazy-Semantik anwenden

in der Vorlesung:

Konsequenzen der Lazy-Semantik werden erläutert.

Lazy Listen in Haskell

FP-8.4

Listen in Haskell haben Lazy-Semantik - wie alle Datentypen.

Definition einer **nicht-endlichen Liste** von 1en:

```
ones :: [Int]
ones = 1 : ones
```

```
take 4 ones        liefert [1, 1, 1, 1]
```

Funktionsaufrufe brauchen nicht zu terminieren:

```
numsFrom :: Int -> [Int]
numsFrom n = n : numsFrom (n+1)
```

```
take 4 (numsFrom 3) liefert [3, 4, 5, 6]
```

Vorlesung Funktionale Programmierung SS 2012 / Folie 804

Ziele:

Nicht-endlichen Listen verstehen

in der Vorlesung:

An Beispielen wird erläutert:

- Definition nicht-endlicher Listen,
- Berechnung von nicht-endlichen Listen.

Listen als Ströme verwenden

Listen können unmittelbar wie Ströme verwendet werden:

```
squares :: [Int]
squares = map (^2) (numsFrom 0)

take 5 squares          liefert [0, 1, 4, 9, 16]
```

Paradigma Konvergenz (vgl. FP-7.7):

```
within :: Float -> [Float] -> Float
within eps (x1:(x2:xs)) =
  if abs(x1-x2)<eps then x2 else within eps (x2:xs)

myIterate :: (a->a) -> a -> [a]
myIterate f x = x : myIterate f (f x)

nextApprox a x = (a / x + x) / 2.0

qroot a = within 1e-8 (myIterate (nextApprox a) 1.0)
```

Strom von Fibonacci-Zahlen:

```
fib :: [Int]                zip erzeugt Strom von Paaren
fib = 1 : 1 : [ a+b | (a,b) <- zip fib (tail fib) ]

fibs :: [Int]              zipWith verknüpft die Elemente zweier Ströme
fibs = 1 : 1 : (zipWith (+) fibs (tail fibs))
```

Vorlesung Funktionale Programmierung SS 2012 / Folie 805

Ziele:

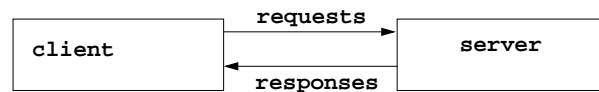
Listen als Ströme verstehen

in der Vorlesung:

An Beispielen wird erläutert:

- Ströme sind nicht-endliche Listen,
- Zusammensetzen von Strömen,
- spezielle Notationen zur Berechnung von Listen.

Simulation zyklischer Datenflüsse



```
reqs = client csInit resps
resps = server reqs

server :: [Int] -> [Int]
server (req:reqs) = process req : server reqs

client :: Int -> [Int] -> [Int]
-- client init (resp:resps) = init : client (next resp) resps
-- Fehler: das zweite Pattern wird zu früh ausgewertet

-- client init resps = init : client (next (head resps)) (tail resps)
-- funktioniert: Das zweite Pattern wird erst bei Benutzung ausgewertet

client init ~(resp:resps) = init : client (next resp) resps
-- Das zweite Pattern wird erst bei Benutzung ausgewertet

csInit = 0
next resp = resp
process req = req+1
```

Vorlesung Funktionale Programmierung SS 2012 / Folie 806

Ziele:

Beispiel für Simulation verstehen

in der Vorlesung:

Am Beispiel wird erläutert:

- suggestive Komposition auch zyklischer Ströme,
- lazy Bindung von Pattern,
- freie Variable mit Vorwärtsreferenzen: next, process

Beispiel: Hamming-Folge

Erzeuge eine Folge $X = x_0, x_1, \dots$ mit folgenden Eigenschaften:

1. $x_{i+1} > x_i$ für alle i
2. $x_0 = 1$
3. Falls x in der Folge X auftritt, dann auch $2x$, $3x$ und $5x$.
4. Nur die durch (1), (2) und (3) spezifizierten Zahlen treten in X auf.

Funktion zum Verschmelzen zweier aufsteigend sortierten Listen zu einer ohne Duplikate:

```
setMerge :: Ord a => [a] -> [a] -> [a]
setMerge allx@(x:xs) ally@(y:ys) -- allx ist Name für das gesamte Pattern
  | x == y    = x : setMerge xs    ys
  | x < y     = x : setMerge xs    ally
  | otherwise = y : setMerge allx ys
```

Funktion für die Hamming-Folge, wie definiert:

```
hamming :: [Int]
hamming = 1 : setMerge (map (*2) hamming)
                  (setMerge (map (*3) hamming)
                          (map (*5) hamming))
```

Vorlesung Funktionale Programmierung SS 2012 / Folie 807

Ziele:

Klare Definition durch Lazy

in der Vorlesung:

Es wird erläutert:

- Hamming-Folge als Spezialfall: Mengenabschluss bzgl. einiger Funktionen und Anfangswerte
- Definition von setMerge und hamming

9 Funktionale Sprachen: Lisp

nach Peter Thiemann: *Grundlagen der Funktionalen Programmierung*, Teubner, 1994

Lisp

- 1960 von **McCarthy** am MIT entwickelt
- **klassischer Artikel**: J. McCarthy: *Recursive functions of symbolic expressions and their computation by machine, Part I.*, Communications of the ACM, 3(4), 184-195, 1960
- sehr **einfacher Interpretierer**: Funktionen `eval` (Ausdruck) und `apply` (Aufruf)
- sehr **einfache Notation für Daten und Programm**: Zahlen, Symbole, Listen als Paare
Preis der Einfachheit: Klammerstruktur wird schon bei kleinen Programmen unübersichtlich
- HOF erfordern spezielle Notation
- erste Sprache mit automatischer **Speicherbereinigung (garbage collection)**
- **keine Typisierung (nur Unterscheidung zwischen Atom und Liste)**
- **dynamische Namensbindung**
- **ursprünglich call-by-name**
- auch imperative Variablen
- moderne Dialekte: Common Lisp, Scheme
call-by-value und statische Namensbindung

Vorlesung Funktionale Programmierung SS 2013 / Folie 901

Ziele:

Überblick über wichtige funktionale Sprachen

in der Vorlesung:

Eigenschaften werden erläutert

Funktionale Sprachen: FP, ML, SML

FP-9.2

FP

- Theoretische, einflussreiche Arbeit, Turing Award Lecture:
J. Backus: *Can Programming Be Liberated from the von Neumann Style? A Functional Style and Its Algebra of Programs*, Communications of the ACM, 21(8), 613-641, 1978
- In FP gibt es **nur Funktionen** - keine Daten; Berechnungen Kombination von Funktionen

ML, SML

- erster ML-Compiler 1974
SML 1990: R. Milner, M. Toft, R. Harper: *The Definition of Standard ML*, MIT Press, 1990
- erste (bedeutende) funktionale Sprache mit **strenger statischer Typbindung**, Hindley/Milner **Typsystem mit parametrischer Polymorphie**
- **Typinferenz**
- **statische Namensbindung**
- **HOF und Currying uneingeschränkt**
- **strikte Aufruf-Semantik (call-by-value)**
- **abstrakte Datentypen, Module, Funktoren**
- **Ausnahmebehandlung**
- **getypte Referenzen** (imperative Aspekte)

© 2005 bei Prof. Dr. Uwe Kastens

Vorlesung Funktionale Programmierung SS 2013 / Folie 902

Ziele:

Überblick über wichtige funktionale Sprachen

in der Vorlesung:

Eigenschaften werden erläutert

Funktionale Sprachen: Miranda, Haskell

FP-9.3

Miranda™

- Turner 1985; kommerziell vertrieben
- nicht-strikt (lazy), polymorphe Typen, implementiert mit SKI-Reduktion
- ungewöhnliche Syntax, keine Lambda-Ausdrücke

Haskell

- Entwicklung begann 1987
- **Stand der Technik** in den funktionalen Sprachen
- **statisches Typsystem mit parametrischer Polymorphie und Überladung durch Typklassen, Typinferenz**
- **statische Namensbindung**
- **nicht-strikte Aufruf-Semantik (call-by-need)**
- **HOF und Currying uneingeschränkt**
- voll ausgebautes **Modulsystem**, auch mit **separater Übersetzung**
- **rein-funktionale (Seiten-effektfreie) E/A**: Ströme, Continuations, Monaden
- Syntax für **kompakte Notation**

© 2005 bei Prof. Dr. Uwe Kastens

Vorlesung Funktionale Programmierung SS 2013 / Folie 903

Ziele:

Eindruck vom Einsatz funktionaler Sprachen

in der Vorlesung:

Beispiele werden kurz erläutert

Scala: objektorientierte und funktionale Sprache

Scala: Objektorientierte Sprache (wie Java, in kompakterer Notation) ergänzt um funktionale Konstrukte (wie in SML); objektorientiertes Ausführungsmodell (Java)

funktionale Konstrukte:

- geschachtelte Funktionen, Funktionen höherer Ordnung, Currying, Fallunterscheidung durch Pattern Matching
- Funktionen über Listen, Ströme, ..., in der umfangreichen Sprachbibliothek
- parametrische Polymorphie, eingeschränkte, lokale Typinferenz

objektorientierte Konstrukte:

- Klassen definieren alle Typen (Typen konsequent oo - auch Grundtypen), Subtyping, beschränkbare Typparameter, Case-Klassen zur Fallunterscheidung
- objektorientierte Mixins (Traits)

Allgemeines:

- statische Typisierung, parametrische Polymorphie und Subtyping-Polymorphie
- sehr kompakte funktionale Notation
- komplexe Sprache und recht komplexe Sprachbeschreibungen
- übersetzbar und ausführbar zusammen mit Java-Klassen
- seit 2003, Martin Odersky, www.scala.org

Vorlesung Funktionale Programmierung SS 2013 / Folie 903a

Ziele:

Übersicht über Eigenschaften von Scala

in der Vorlesung:

Kurze Erläuterungen und Hinweise auf die folgenden Folien

Übersetzung und Ausführung: Scala und Java

• Reines Scala-Programm:

ein Programm bestehend aus einigen Dateien `a.scala`, `b.scala`, ... mit Klassen- oder Objekt-Deklarationen in Scala, eine davon hat eine `main`-Funktion;

übersetzt mit `scalac *.scala`
ausgeführt mit `scala MainKlasse`

```
// Klassendeklarationen
object MainKlasse {
// Funktionsdeklarationen
    def main(args: Array[String]) {
// Ein- und Ausgabe, Aufrufe
    }
}
```

• Java- und Scala-Programm:

ein Programm bestehend aus Scala-Dateien `a.scala`, `b.scala`, ... und Java-Dateien `j.java`, `k.java`, ...; eine Java-Klasse hat eine `main`-Funktion;

übersetzt mit `scalac *.scala *.java`
dann mit `javac *.scala *.java`
(Pfad zur Bibliothek angeben)
ausgeführt mit `java MainKlasse`

• Reines Scala-Programm interaktiv: (siehe Übungen)

Vorlesung Funktionale Programmierung SS 2013 / Folie 903b

Ziele:

Kombination von Modulen in Scala und Java

in der Vorlesung:

Kurze Erläuterungen

Benutzung von Listen

Die abstrakte **Bibliotheksklasse** `List[+A]` definiert Konstruktoren und Funktionen über **homogene Listen**

```
val li1 = List(1,2,3,4,5)
```

```
val li2 = 2 :: 4 :: -1 :: Nil
```

Verfügbare Funktionen:

`head`, `tail`, `isEmpty`, `map`, `filter`, `forall`, `exist`, `range`, `foldLeft`, `foldRight`, `range`, `take`, `reverse`, `:::` (append)

zwei Formen für Aufrufe:

```
li1.map (x=>x*x)// qualifizierter Bezeichner map
```

```
li1 map (x=>x*x)// infix-Operator map
```

Funktionsdefinitionen mit Fallunterscheidung:

```
def isort(xs: List[Int]): List[Int] = xs match {
  case List() => List()
  case x :: xs1 => insert(x, isort(xs1))
}
def insert(x: Int, xs: List[Int]): List[Int] = xs match {
  case List() => List(x)
  case y :: ys => if (x <= y) x :: xs else y :: insert(x, ys)
}
```

Vorlesung Funktionale Programmierung SS 2013 / Folie 903c

Ziele:

Homogene Listen in Scala

in der Vorlesung:

An den Beispielen wird erläutert:

- Listennotation,
- Definition von Namen für Werte und Funktionen,
- Funktionen des List-Moduls

Case-Klassen: Typkonstruktoren mit Pattern Matching

Klassen können **Parameter** haben. Sie sind Instanzvariable der Klasse und Parameter des Konstruktors.

Die **Konstruktoren von Case-Klassen** können zur **Fallunterscheidung** und zum **Binden der Werte** dieser Instanzvariablen verwendet werden. Objekte können ohne `new` gebildet werden; Methoden für strukturellen Vergleich (`==`) und `toString` werden erzeugt.

```
abstract class Person
case class King () extends Person
case class Peer (degr: String, terr: String, number: Int )
    extends Person
```

```
case class Knight (name: String) extends Person
case class Peasant (name: String) extends Person
```

```
val guestList =
  Peer ("Earl", "Carlisle", 7) :: King () ::
  Knight ("Gawain") :: Peasant ("Jack Cade") :: Nil
```

```
def title (p: Person): String = p match {
  case King () => "His Majesty the King"
  case Peer (d, t, n) => "The " + d + " of " + t
  case Knight (n) => "Sir " + n
  case Peasant(n) => n }

```

```
println ( guestList map title )
```

```
List(His Majesty the King, The Earl of Carlisle, Sir Gawain, Jack Cade)
```

Vorlesung Funktionale Programmierung SS 2013 / Folie 903d

Ziele:

Case-Klassen für Typkonstruktoren

in der Vorlesung:

An dem Beispiel wird erläutert:

- Varianten von Konstruktoren in Datentypen,
- Parameter in Konstruktoren,
- Fallunterscheidung durch Pattern Matching in Funktionsdefinitionen
- Vergleich mit datatype-Definition in SML

Definition polymorpher Typen

Polymorphe Typen werden durch **Klassen mit Typparameter** definiert, z.B. Container-Klassen.

Alternative Konstruktoren werden durch **Case-Klassen** formuliert, z.B Binärbäume.

```
abstract class BinTree[A]
case class Lf[A] () extends BinTree[A]
case class Br[A] (v: A, left: BinTree[A], right: BinTree[A])
    extends BinTree[A]
```

Funktionen über Binärbäume:

```
def preorder[A] (p: BinTree[A]): List[A] = p match {
  case Lf() => Nil
  case Br(v,tl,tr) => v :: preorder (tl) ::: preorder (tr)
}

val tr: BinTree[Int] =
  Br (2, Br (1, Lf(), Lf()), Br (3, Lf(), Lf()))

println ( preorder (tr) )
```

Vorlesung Funktionale Programmierung SS 2013 / Folie 903e

Ziele:

Definition polymorpher Typen

in der Vorlesung:

An dem Beispiel wird erläutert:

- explizite Angaben des Typparameters
- Definition polymorpher Funktionen

Funktionen höherer Ordnung und Lambda-Ausdrücke

Ausdrucksmöglichkeiten in Scala entsprechen etwa denen in SML, aber die **Typinferenz polymorpher Signaturen** benötigt an vielen Stellen **explizite Typangaben**

Funktion höherer Ordnung: Faltung für Binärbäume

```
def treeFold[A,B] (f: (A, B, B)=>B, e: B, t: BinTree[A]): B =
  t match {
    case Lf () => e
    case Br (u,tl,tr) =>
      f (u, treeFold (f, e, tl), treeFold (f, e, tr))
  }
```

Lambda-Ausdrücke:

```
11.map ( x=>x*x )           Quadrat-Funktion
13.map ( _ => 5 )           konstante Funktion
12.map ( Math.sin _ )       Sinus-Funktion
14.map ( _ % 2 == 0 )       Modulo-Funktion

treefold ( ((_: Int, c1: Int, c2: Int) => 1 + c1 + c2) , 0, t)
```

Vorlesung Funktionale Programmierung SS 2013 / Folie 903f

Ziele:

HOF und Lambda-Ausdrücke

in der Vorlesung:

An den Beispielen wird erläutert:

- Definition einer polymorphen Funktion höherer Ordnung,
- verschiedene Formen von Lambda-Ausdrücken,
- Vergleich mit SML

Currying

Funktionen in **Curry-Form** werden durch mehrere **aufeinanderfolgende Parameterlisten** definiert:

```
def secl[A,B,C] (x: A) (f: (A, B) => C) (y: B) = f (x, y);
def secr[A,B,C] (f: (A, B) => C) (y: B) (x: A) = f (x, y);
def power (x: Int, k: Int): Int =
  if (k == 1) x else
  if (k%2 == 0) power (x*x, k/2) else
  x * power (x*x, k/2);
```

Im Aufruf einer Curry-Funktion müssen **weggelassene Parameter** durch **_** angegeben werden:

```
def twoPow = secl (2) (power) _ ;Funktion, die 2er-Potenzen berechnet
def pow3 = secr (power) (3) _ ; Funktion, die Kubik-Zahlen berechnet
println ( twoPow (6) )
println ( pow3 (5) )
println ( secl (2) (power) (3) )
```

Vorlesung Funktionale Programmierung SS 2013 / Folie 903g

Ziele:

Currying und Funktionale dafür

in der Vorlesung:

An den Beispielen aus der Vorlesung wird erläutert:

- Definition und Aufruf polymorpher Funktionen in CurryForm,
- Vergleich mit SML

Ströme in Scala

In Scala werden **Ströme** in der Klasse `Stream[A]` definiert.

Besonderheit: Der **zweite Parameter der cons-Funktion** ist als **lazy** definiert, d.h. ein aktueller **Parameterausdruck** dazu wird erst ausgewertet, wenn er benutzt wird, d.h. der Parameterausdruck wird in eine **parameterlose Funktion** umgewandelt und so übergeben. Diese Technik kann allgemein für Scala-Parameter angewandt werden.

```
def iterates[A] (f: A => A) (x: A): Stream[A] =
  Stream.cons(x, iterates (f) (f (x)))
def smap[A] (sq: Stream[A]) (f: A => A): Stream[A] =
  Stream.cons(f (sq.head), smap[A] (sq.tail) (f) )

val from = iterates[Int] (_ + 1) _
val sq = from (1)
val even = sq filter (_ % 2 == 0)
val ssq = from (7)
val msq = smap (ssq) (x=>x*x)

println( msq.take(10).mkString(",") )
```

Vorlesung Funktionale Programmierung SS 2013 / Folie 903h

Ziele:

Benutzung von Strömen

in der Vorlesung:

An den Beispielen aus der Vorlesung wird erläutert:

- Ströme werden in einem Modul definiert,
- Definition von Strom-Funktionalen wie in SML,
- Vergleich mit SML

Objektorientierte Mixins

Mixin ist ein Konzept in objektorientierten Sprachen: Kleine Einheiten von implementierter Funktionalität können Klassen zugeordnet werden (spezielle Form der Vererbung). Sie definieren nicht selbst einen Typ und liegen neben der Klassenhierarchie.

```
abstract class Bird { protected val name: String }
```

Verschiedene
Verhaltensweisen
werden hier als **trait**
definiert:

```
trait Flying extends Bird {
  protected val flyMessage: String
  def fly() = println(flyMessage)
}
trait Swimming extends Bird {
  def swim() = println(name+" is swimming")
}
```

```
class Frigatebird extends Bird with Flying {
  val name = "Frigatebird"
  val flyMessage = name + " is a great flyer"
}
class Hawk extends Bird with Flying with Swimming {
  val name = "Hawk"
  val flyMessage = name + " is flying around"
}
val hawk = (new Hawk).fly(); hawk.swim(); (new Frigatebird).fly();
```

Vorlesung Funktionale Programmierung SS 2013 / Folie 903i

Ziele:

OO-Konzept Mixins durch Traits in Scala

in der Vorlesung:

An dem Beispiel wird das Mixin-Konzept erläutert.

Vorlesung Funktionale Programmierung SS 2013 / Folie 904

Ziele:

Eindruck von Anwendungen in der Praxis bekommen

in der Vorlesung:

Die Anwendungsthemen werden erläutert.

Beispiele für Anwendungen funktionaler Sprachen

aus Peter Thiemann: *Grundlagen der Funktionalen Programmierung*, Teubner, 1994

- Programmierausbildung für Anfänger (z. B. Scheme, Gofer)
- Computeralgebrasysteme wie MACSYMA in Lisp implementiert
- Editor EMACS in Lisp implementiert
- Beweissysteme ISABELLE, LCF, Termesetzung REVE in ML implementiert
- Übersetzer und Interpretierer: SML, Lazy-ML, Glasgow Haskell C. in ML implementiert, Yale Haskell C. in Lisp implementiert
- Firma Ericsson eigene funktionale Sprache Erlang für Software im Echtzeiteinsatz, Telekommunikation, Netzwerkmonitore, grafische Bedienoberflächen

aus J. Launchbury, E. Meijer, Tim Sheard (Eds.): *Advanced Functional Programming*, Springer, 1996:

- Haggis: System zur Entwicklung grafischer Bedienoberflächen (S. Finne, S. Peyton Jones)
- Haskore Music Tutorial (Paul Hudak)
- Implementing Threads in Standard ML
- Deterministic, Error-Correcting Combinator Parsers (S. D. Swierstra, L. Duponcheel)

Verständnisfragen (1)

FP-10.1

1. Einführung

1. Charakterisieren Sie funktionale gegenüber imperativen Sprachen; was bedeutet applikativ?

2. Lisp: FP Grundlagen

2. Charakteristische Eigenschaften von Lisp und seine Grundfunktionen.

3. Programm und Daten in Lisp; Bedeutung der `quote`-Funktion.

4. Funktion definieren und aufrufen

5. Dynamische Bindung im Gegensatz zu statischer Bindung.

6. Erklären Sie den Begriff Closure; Zusammenhang zum Laufzeitkeller.

3. Grundlagen von SML

7. Typinferenz: Aufgabe und Verfahren am Beispiel, mit polymorphen Typen.

8. Aufrufsemantik erklärt durch Substitution; call-by-value, call-by-name, call-by-need.

9. Muster zur Fallunterscheidung: Notation, Auswertung; Vergleich mit Prolog.

10. Bindungsregeln in SML (`val`, `and`, `let`, `local`, `abstype`, `struct`).

Vorlesung Funktionale Programmierung SS 2013 / Folie 906

Ziele:

Verständnis der Themen prüfen

Verständnisfragen (2)

FP-10.2

4. Programmierparadigmen zu Listen

11. Anwendungen für Listen von Paaren, Listen von Listen; Funktionen `zip` und `unzip`.

12. Matrizen transponieren, verknüpfen; applikativ und funktional.

13. Lösungsraumsuche für Münzwechsel; Signatur erläutern; Listen und Ströme.

14. Polynom-Multiplikation: Darstellungen, Halbierungsverfahren.

5. Module Typen

15. `datatype`-Definitionen: vielfältige Ausdrucksmöglichkeiten.

16. Gekapselte Typen (`abstype`) erläutern.

17. Ausnahmen: 3 Sprachkonstrukte; Einbettung in funktionale Sprache.

18. Modul-Varianten (`structure`), Schnittstellen.

19. Generische Module (`functor`) erläutern.

Vorlesung Funktionale Programmierung SS 2013 / Folie 907

Ziele:

Verständnis der Themen prüfen

Verständnisfragen (3)

6. Funktionen als Daten

- 20. Wo kommen Funktionen als Daten vor? Beispiele angeben.
- 21. Currying: Prinzip und Anwendungen
- 22. Funktionale `sec1`, `secr`: Definition, Signatur und Anwendungen
- 23. Weitere allgemeine Funktionale (`o`, `iterate`, `s κ I`)
- 24. Funktionale für Listen: `map` (1-, 2-stufig), `filter`, `take`, `drop` (-while)
- 25. Quantoren: Definition, Anwendung z.B. für disjunkte Listen
- 26. `foldl`, `foldr`, `treefold` erläutern

7. Unendliche Listen (Ströme)

- 27. Ströme: Konzept, Implementierung, Anwendungen
- 28. `datatype` für Ströme und Varianten dazu
- 29. Stromfunktionen, Stromfunktionale
- 30. Beispiel: Konvergente Folge
- 31. Ströme rekursiv zusammengesetzt (Sieb des Eratosthenes)
- 32. Strom aller Lösungen im Lösungsbaum (Signatur der Funktion)
- 33. Tiefensuche - Breitensuche im Lösungsbaum, 3 Abstraktionen

Vorlesung Funktionale Programmierung SS 2013 / Folie 908

Ziele:

Verständnis der Themen prüfen

Verständnisfragen (4)

8. Lazy Evaluation

- 34. Paradigma lazy: Bedeutung in Sprachkonstrukten, im Vergleich zu eager
- 35. Lazy Semantik in Haskell, Beispiele für Aufrufe, Listen, Funktionen
- 36. Listen als Ströme; Vergleich zu Programmierung in SML; Fibonacci als Daten
- 37. Beispiel Hamming-Folge

9. Funktionale Sprachen

- 38. Eigenschaften von Lisp zusammenfassen
- 39. Eigenschaften von SML zusammenfassen
- 40. Eigenschaften von Haskell zusammenfassen

Vorlesung Funktionale Programmierung SS 2013 / Folie 909

Ziele:

Verständnis der Themen prüfen